

Frankfurt 9/m 1960.

R. Kümmer

A: Schichtdicken-abhängiger Quantisierungseffekt
in Tunnelkontakten

B: Untersuchungen zum Zwischenzustand und gemisch-
ten Zustand von Supraleitern I. und II. Art

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

vorgelegt von

Reiner Kümmel
aus Fulda

Frankfurt am Main
Januar 1968

At: Historisch-geographische Geographische
an Universitäten

Historische Geographie von Deutschland und
des Landes von 1800 bis 1850

Inaugural-Dissertation

von

Dr. phil. h. c. h. Dr. phil. h. c. h.

Dr. phil. h. c. h. Dr. phil. h. c. h.

Lehrer an der Universität

zu Frankfurt am Main



verlegt von

Kaiser Kassel

aus Leipzig

Frankfurt am Main

Januar 1850

Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaft-
lichen Fakultät der Universität Frankfurt/Main

Dekan: Professor Dr. W. Martienssen
Erster Berichterstatter: Professor Dr. P. Fulde
Zweiter Berichterstatter: Professor Dr. H. Bilz
Sondergutachter: Professor Dr. J. Bardeen

Tag der mündlichen Prüfung: 2. Mai 1968

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

TEIL A: SCHICHTDICKEN-ABHÄNGIGER QUANTISIERUNGSEFFEKT IN TUNNELKONTAKTEN

1. Einleitung	4
2. Die Zustandsdichte in einem dünnen Film	5
3. Die Tunnelcharakteristik	8
4. Zusammenfassung	14

ANHANG: Die Tunnel-Wahrscheinlichkeit von Quasiteilchen	17
---	----

LITERATURVERZEICHNIS	27
----------------------	----

TEIL B: UNTERSUCHUNGEN ZUM ZWISCHENZUSTAND UND GEMISCHTEN ZUSTAND VON SUPRALEITERN I. UND II. ART

Einleitung	29
I. Stromfluß durch die ebene Phasengrenze zwischen einem normalen und einem supraleitenden Gebiet	34
1. Herleitung der zeitabhängigen Quasiteilchen-Gleichungen	34
2. Die Phasenverschiebung $S_L(x)$	44
3. Die Verteilungsfunktion der Quasiteilchen	49
4. Der Strom durch eine N-S Phasengrenze	53
5. Die zeitliche Änderung des Impulses in der Phasengrenze	62
6. Schlußbetrachtung	71
II. Impulsverluste durch Paarbrechungsprozesse im kritischen Strom um einen Wirbelkern	71

III. Die Anregungsspektren der gebundenen Quasiteilchen im Zwischenzustand und im gemischten Zustand von Supraleitern I. und II. Art	80
1. Das Spektrum im stromführenden Zwischenzustand eines Supraleiters I. Art	80
2. Die gebundenen Zustände im Wirbelkern eines Supraleiters II. Art	87
Zusammenfassung	104
LITERATURVERZEICHNIS	105

T E I L A

SCHICHTDICKEN-ABHÄNGIGER QUANTISIERUNGSEFFEKT IN TUNNELKONTAKTEN

1. Einleitung

Schichtdicken-abhängige Quantisierungseffekte in halbmimetallischen Filmen wie Bi sind in letzter Zeit von verschiedenen russischen Forschern beobachtet und diskutiert worden¹⁾²⁾. Man hat sie "definiert als die Abhängigkeit der thermodynamischen Eigenschaften und kinetischen Koeffizienten von Festkörpern von deren charakteristischen geometrischen Größen ..."²⁾ Davor war bereits gezeigt worden, daß die Energielücke eines sehr dünnen supraleitenden Filmes sich sägezahnartig mit der Filmdicke ändert³⁾⁴⁾.

Als Tomasch berichtete⁵⁾, daß in der differentiellen Leitfähigkeit von Tunnelverbindungen periodische Oszillationen auftreten können, lag der Versuch nahe, diese als größenabhängigen Quantisierungseffekt in einem dünnen Film mit quantisierter Energie der Bewegung senkrecht zur Filmoberfläche zu deuten. Doch es stellte sich bald heraus, daß dies einfache Modell den Tomasch Effekt nicht erklären kann, dafür aber einen anderen Effekt in Filmen liefert, die viel dünner sind als die von Tomasch verwendeten; dieser Effekt wird in der vorliegenden Arbeit abgehandelt.

McMillan und Anderson⁶⁾ zeigten, daß der Tomasch Effekt als Interferenzerscheinung zwischen Quasielektronen und Quasilöchern mit nur wenig verschiedenen Wellenzahlen erklärbar ist und durch Streuung an einer Störung der Energielücken-Funktion an oder nahe bei der Film-Oberfläche verursacht wird. In einer ähnlichen Deutung nehmen Wolfram und Lehman⁷⁾ an, daß Rauigkeiten der Filmoberfläche im atomaren Maßstab Grenzbedingungen einführen, die eine Vermischung entarteter Quasiteilchen-Zustände

zur Folge haben. Daraus ergibt sich eine Quantisierung der Differenz der Quasiteilchen-Impulse und die Tunnelcharakteristik von Tomasch.

Die vorliegende Rechnung geht von der Quantisierung des einzelnen Quasiteilchen-Impulses aus und berücksichtigt nicht irgendwelche Vermischungen von Quasiteilchen-Zuständen. Mit der Annahme, daß die Quasiteilchen an der äußeren Grenzfläche eines dünnen Films in einem Tunnelkontakt spiegelnd reflektiert werden, wird gezeigt, daß die Quantisierung der Quasiteilchen-Energie zu Diskontinuitäten in der Zustandsdichte führt, was sich wiederum in periodischen Anomalien in der differentiellen Leitfähigkeit des Tunnelkontakts widerspiegelt. Obwohl der Effekt auftreten kann, wenn der Kontakt völlig normal ist, wird er sehr stark vergrößert, wenn das Metall auf der anderen Seite der Isolierschicht supraleitend ist.

2. Die Zustandsdichte in einem dünnen Film

Das Wesentliche des Effekts können wir schon bei der Diskussion der Zustandsdichte in einem dünnen Film erkennen.

Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß die Temperatur $T = 0^\circ\text{K}$ beträgt und daß beide Komponenten des Tunnelkontaktes normalleitend sind; vgl. Fig. 1.

Wenn wir die Elektronen durch WKB Lösungen der Einteilchen-Schrödingergleichung beschreiben, wie das schon Bardeen⁸⁾ und Harrison⁹⁾ getan haben, und als Randbedingung annehmen, daß die Wellenfunktionen an der äußeren Oberfläche des dünnen Films bei $z = -(d + \frac{a}{2})$ verschwinden, dann erhalten wir nach Gl. (A 13) des Anhangs die Energieeigenwerte in dem dünnen Film als

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(n - \frac{1}{4} \right)^2 \left(\frac{\pi}{d} \right)^2 + k_0^2 \right] - \epsilon_F + V; \quad (2.1)$$

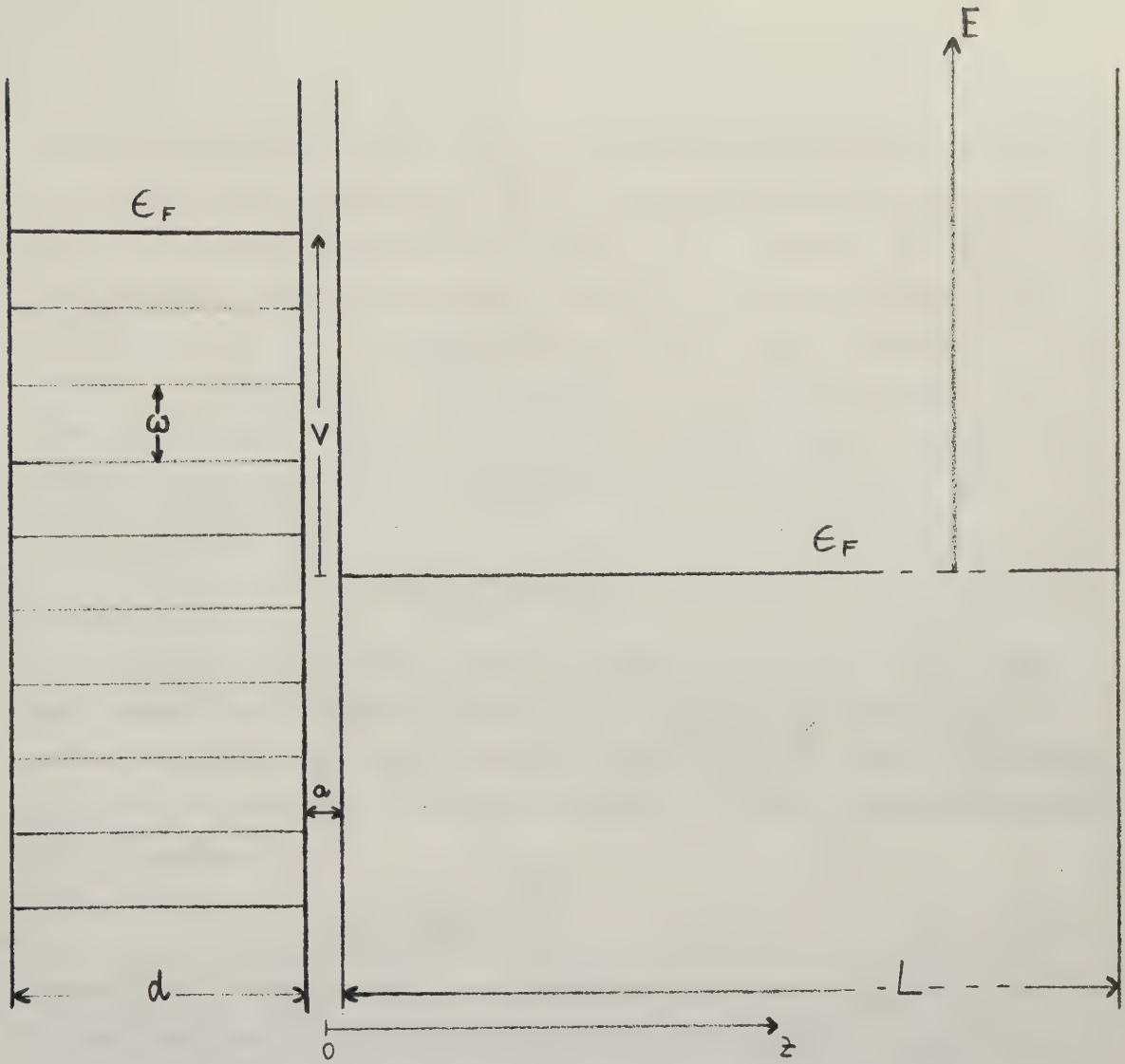


Fig. 1: Normalleitender Tunnelkontakt bei $T = 0^\circ\text{K}$. Das linke Metall ist ein dünner Film der Dicke d , dessen quantisierte Energieniveaus dicht bei der Fermi-Energie ϵ_F in gleichen Abständen ω aufeinanderfolgen. Durch eine Oxyd-Barriere der Dicke a vom linken Film getrennt, erstreckt sich auf der rechten Seite ein weit ausgedehntes Metall bis zur Grenze $z=L \gg d$. Die angelegte Spannung $V > 0$ hebt eine Anzahl besetzter Zustände unterhalb von ϵ_F im linken Film über die Fermi-Kante des rechten Metalls. Die Elektronen tunneln von links nach rechts.

dabei wird die Energie von der Fermi-Oberfläche des rechten Metalls aus gemessen, $\vec{k}_{||}$ ist der Wellenvektor parallel zur Isolierschicht, und $(n - \frac{1}{4})\pi/d = k_z$ ist mit $n = 1, 2 \dots N$ die quantisierte Wellenzahl senkrecht zur Barriere. Die Näherung, daß k_z räumlich konstant ist, gilt überall außer in dem kleinen Gebiet bei der Isolierschicht, in dem das Barrierenpotential steil von Null auf seinen Maximalwert ansteigt. Die Fermienergie legt für n die obere Grenze als

$$N \leq \frac{d}{\pi \hbar} \sqrt{2m\epsilon_F} \quad (2.2)$$

fest. Wenn wir $n = N - \eta$ setzen, wobei $\eta = 0, 1 \dots N-1$ ist, und annehmen, daß $N \gg \eta$ ist, dann können wir den energetischen Abstand ω zwischen zwei benachbarten Energieniveaus, die zum selben $\vec{k}_{||}$ gehören und dicht an der Fermi-Oberfläche liegen, als

$$\omega = \frac{\pi}{d} \hbar \sqrt{\frac{2\epsilon_F}{m}} \quad (2.3)$$

schreiben. Die Anzahl der Zustände mit gleichem k_z und verschiedenen $\vec{k}_{||}$ in einem solchen Intervall ω kann als

$$\Delta n_{||} = \frac{A}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \omega \quad (2.4)$$

berechnet werden; A ist die Oberfläche des Films. Die Zahl der Zustände mit verschiedenen k_z , die tiefer als $\epsilon_F - \eta\omega$ liegen und zu der Gesamtzahl von Zuständen innerhalb ω beitragen, ist $N - 1 - \eta \equiv n_{\perp}$. Daher ist die Gesamtzahl der Zustände im Energieintervall $\epsilon_F - (\eta+1)\omega < E < \epsilon_F - \eta\omega$ gleich

$$\Delta n(\eta) = n_{\perp} \Delta n_{||} = (N - 1 - \eta) \cdot \frac{A}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \omega, \quad (2.5)$$

und die Zustandsdichte $\Delta n(\eta)/\omega$ ist innerhalb von ω konstant. Damit können wir aus Fig. 1 ableiten, daß die Zahl derjenigen besetzten Zustände auf der linken Seite der Barriere, die unbesetzten Zuständen auf der rechten Seite gegenüberstehen, als Funktion der angelegten Spannung $V > 0$ durch

$$n(V) = \sum_{\eta=0}^{N-1} \left\{ \Delta n(\eta) \Theta(V - (\eta+1)\omega) + \frac{\Delta n(\eta)}{\omega} (V - \eta\omega) \Theta((\eta+1)\omega - V) \Theta(V - \eta\omega) \right\} \quad (2.6)$$

gegeben ist, wobei

$$\Theta(E) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } E \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist.

Die Summe aller ersten Terme in der Klammer zählt die Zustände in den Intervallen, die ganz über das rechte Fermi-Niveau angehoben sind, und der zweite Term gibt den entsprechenden Teil von Zuständen aus dem Intervall an, dessen untere Grenze als erste unterhalb des rechten Fermi-Niveaus liegt.

Indem wir den Ausdruck $\frac{\Delta n_{II}}{\omega} \sum_{\eta=0}^{N-1} (V - \eta\omega) \Theta(V - \eta\omega)$ in der Gl. (2.6) addieren und subtrahieren, können wir sie auf

$$n(V) = \frac{\Delta n_{II}}{\omega} \left\{ NV - \sum_{\eta=0}^{N-1} (V - \eta\omega) \Theta(V - \eta\omega) \right\} \quad (2.7)$$

umformen und erhalten, wie auch bei

$$\frac{dn}{dV} = \frac{A}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \left\{ N - \sum_{\eta=0}^{N-1} \Theta(V - \eta\omega) \right\}, \quad (2.8)$$

eine unstetige Funktion von V , wenn immer V ein ganzzahliges Vielfaches von ω ist.

Wir erwarten, daß der Tunnelstrom und die differentielle Leitfähigkeit des Kontakts sich qualitativ wie $n(V)$ und $\frac{dn}{dV}$ verhalten. Im nächsten Abschnitt wird das nachgewiesen werden.

3. Die Tunnelcharakteristik

Im Anhang wird die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit w dafür berechnet, daß ein Elektron vom linken Film in das rechte Metall hineintunnelt. Sie ist gemäß den Gln. (A 16) und (A 15)

$$W = \frac{\pi \hbar^3}{2 L d m^2} \sum_{k_z, k_{||}, k_z', k_{||}'} k_z k_z' e^{-2\kappa a} \delta_{k_{||}, k_{||}'} \delta(E - E_{k'}) \left[f(E_{k_z}) - f(E_{k_z'}) \right]. \quad (3.1)$$

Bei der Summation über $\vec{k}_\parallel$ und k'_z nehmen wir an, daß das rechte Metall so dick ist, daß seine k'_z -Werte und die zugehörigen Energien ein Kontinuum bilden. Dann kann

$$\sum_{k'_z} \rightarrow \int dE_{k'} g_{+1}(E_{k'}) \quad (3.2)$$

umgeschrieben werden, wobei $g_{+1}(E_{k'})$ die Dichte derjenigen Zustände auf der rechten Seite ist, in denen die Quasiteilchen sich senkrecht zur Isolierschicht bewegen. Wenn wir annehmen, daß das rechte Metall ein Supraleiter mit der Energielücke Δ ist, dann wird mit $\epsilon_{k'} \equiv \frac{\hbar^2}{2m}(k_z'^2 + k_\parallel'^2) - \epsilon_F$ das Energiespektrum seiner Quasiteilchen durch $E_{k'} = \sqrt{\epsilon_{k'}^2 + \Delta^2}$ beschrieben, und die eindimensionale Zustandsdichte ist

$$g_{+1}(E_{k'}) = \frac{dn_+}{dk'_z} \frac{dk'_z}{d\epsilon_{k'}} \frac{d\epsilon_{k'}}{dE_{k'}} = \frac{L}{2\pi} \frac{m}{\hbar^2 k_z} \frac{|E_{k'}|}{\sqrt{E_{k'}^2 - \Delta^2}} \quad (3.3)$$

Wir können auch die Summe über die kontinuierlichen Werte von $\vec{k}_\parallel$ in ein Integral umwandeln,

$$\sum_{\vec{k}_\parallel} \rightarrow \frac{A}{4\pi} \int dk_\parallel^2, \quad (3.4)$$

und erhalten die Dichte des Tunnelstroms $j = \frac{e}{A} W$ aus den Gln. (3.1) bis (3.4) als

$$j = \frac{e\hbar}{16\pi m d} \sum_{k_z} \int_0^\infty dk_\parallel^2 e^{-2\kappa a} \frac{|E_{k'}|}{\sqrt{E_{k'}^2 - \Delta^2}} \left[f(E_{k'} - V) - f(E_{k'}) \right] \quad (3.5)$$

Um die folgenden Rechnungen einfach zu halten, nehmen wir ab hier an, daß die Temperatur praktisch gleich Null ist.

a) Der dünne Film ist normalleitend

Das Energiespektrum (2.1) der Elektronen im linken Film ist

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2m}(k_z^2 + k_\parallel^2) - \epsilon_F + V \equiv \epsilon_k + V,$$

und die reziproke Eindringtiefe

$$\kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - V) - \hbar^2 k_z^2} \quad (3.6)$$

hängt nicht von k_z ab.

Bei $T = 0^\circ \text{K}$ ist

$$f(E_{k_z} - V) - f(E_{k_z}) = \pm \Theta(\mp E_{k_z}) \Theta(|V| - |E_{k_z}|) \quad \text{für } V \geq 0. \quad (3.7)$$

Daher erhalten wir für $V > 0$

$$J \equiv \int_0^\infty dk_z^2 \frac{|E_{k_z}|}{\sqrt{E_{k_z}^2 - \Delta^2}} [f(E_{k_z} - V) - f(E_{k_z})] \quad (3.8)$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2} \Theta\left(E_F - \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2\right) \left[\sqrt{V^2 - \Delta^2} - \sqrt{\left(V - E_F + \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2\right)^2 - \Delta^2} \right] \Theta\left(V - E_F + \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2\right);$$

dabei wird nur der Realteil von $\sqrt{E_{k_z}^2 - \Delta^2}$ als physikalisch sinnvoll betrachtet.

Ist $V < 0$, gilt

$$J = -\frac{2m}{\hbar^2} \left[\Theta\left(E_F - \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2\right) \sqrt{V^2 - \Delta^2} + \Theta\left(E_F - V - \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2\right) \Theta\left(\frac{\hbar^2}{2m} k_z^2 - E_F\right) \sqrt{\left(V - E_F + \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2\right)^2 - \Delta^2} \right]. \quad (3.9)$$

Wir approximieren die quantisierten k_z -Werte durch

$$k_z = (N + \eta) \frac{\pi}{a} \quad \text{für } k_z > N \frac{\pi}{a}. \quad (3.10)$$

Darum ist mit den Gln. (2.2) und (2.3)

$$\begin{aligned} 0 < E_F - \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2 &= \left(\eta - \frac{\eta^2}{2N}\right) \omega, \\ 0 < \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2 - E_F &= \left(\eta + \frac{\eta^2}{2N}\right) \omega. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Wir definieren

$$\varphi \equiv U_0 - E_F$$

als die Austrittsarbeit des linken Materials gegen die Isolierschicht, und schreiben unter Berücksichtigung der Gln. (3.11) die reziproke Eindringtiefe aus Gl. (3.6) als

$$K_1 = \frac{1}{\hbar} \left\{ 2m \left[\varphi - V + \left(\eta - \frac{\eta^2}{2N} \right) \omega \right] \right\}^{1/2} \text{ für } \epsilon_F > \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2 \text{ und } V > 0, \quad (3.13)$$

$$K_2 = \frac{1}{\hbar} \left\{ 2m \left[\varphi - V - \left(\eta + \frac{\eta^2}{2N} \right) \omega \right] \right\}^{1/2} \text{ für } \epsilon_F < \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2 \text{ und } V < 0.$$

Nur diejenigen Terme $e^{-2\kappa_1 a}$ fallen ins Gewicht, in denen $\eta \ll N$ ist. Darin spiegelt sich die Tatsache wider, daß nur Quasiteilchen mit großen Impulsen senkrecht zur Potentialbarriere eine merkliche Tunnelwahrscheinlichkeit besitzen. Wenn daher $\varphi \gg \eta\omega - V$ ist, können wir entwickeln

$$\kappa_1 \approx \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\varphi} \left[1 - \frac{V}{2\varphi} \right] + \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{\epsilon_F}{\varphi}} \eta. \quad (3.14)$$

Die Gln. (3.9) und (3.11) zeigen, daß in K_2 immer $\left(\eta + \frac{\eta^2}{2N} \right) < |V|$ sein muß. Darum ist für kleine $|V|$ wiederum $\eta \ll N$ und $\varphi \gg \eta\omega + V$, so daß die Entwicklung

$$\kappa_2 \approx \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\varphi} \left[1 - \frac{V}{2\varphi} \right] - \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{\epsilon_F}{\varphi}} \eta \quad (3.15)$$

ergibt.

Die Gln. (3.5) - (3.15) liefern schließlich die Tunnel-Stromdichte

$$j_{N>} = \frac{e}{2\hbar a^2} e^{-d(1-\frac{V}{2\varphi})} N \sum_{\eta=0}^{N-1} \left(1 - \frac{\eta}{N} \right) \left[\operatorname{sgn} V e^{-\beta\eta} \sqrt{V^2 - \Delta^2} - e^{-\beta\eta \operatorname{sgn} V} \sqrt{(|V_1 - \eta\omega|^2 - \Delta^2)} \theta(|V_1 - \eta\omega|) \right], \quad (3.16)$$

wobei gilt

$$\alpha \equiv \frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m\varphi}, \quad \beta \equiv 2\pi \frac{a}{a} \sqrt{\frac{\epsilon_F}{\varphi}} \quad \text{und} \quad \operatorname{sgn} V = \pm 1, \text{ wenn } V \gtrless 0.$$

Wir haben η^2/N vernachlässigt. Obwohl die Entwicklung (3.14) von κ_1 nur für $\eta \ll N$ gültig ist, führt die Kleinheit von $e^{-2\kappa_1 a}$ für $\eta \leq N$ zu einem erträglichen Fehler, wenn wir das approximierte κ_1 bis $\eta = N-1$ benutzen.

Wenn wir in Gl. (3.16) $\Delta = 0$ und $e^{-\operatorname{sgn} V \beta \eta} (1 - \eta/N) \approx 1$ setzen, erhalten wir für $V > 0$ genau den Term in der Klam-

mer von Gl. (2.7). Im Falle $V < 0$ kann eine der Gl. (2.7) entsprechende Gleichung hergeleitet werden, die ebenfalls mit der Gl. (3.16) übereinstimmt. Die Asymmetrie von j hinsichtlich V folgt aus der mit wachsendem Absolutbetrag negativer Spannung zunehmenden Zahl leerer Zustände auf der linken Seite, denen besetzte Zustände rechts der Barriere gegenüberliegen.

Der erste Term in Gl. (3.16) kann aufsummiert werden,

$$S \equiv \sum_{\eta=0}^{N-1} \left(1 - \frac{\eta}{N}\right) e^{-\beta \eta} = \frac{1}{1-e^{-\beta}} \cdot \frac{e^{-\beta} (1-e^{-\beta N})}{N(1-e^{-\beta})^2} \quad (3.17)$$

und für fast alle Werte von $N \gg 1$ und β können wir $S \approx [1-e^{-\beta}]^{-1}$ approximieren.

Die Dichte des Tunnelstroms wird also (3.18)

$$j_{Ns} = \frac{e}{2\pi d^2} e^{-d(1-\frac{V}{2\phi})} N \left\{ S \eta V \cdot S \sqrt{V^2 - \Delta^2} - \sum_{\eta=0}^{N-1} \left(1 - \frac{\eta}{N}\right) e^{-\eta V \beta} \sqrt{(V - \eta \omega)^2 - \Delta^2} \Theta(V - \eta \omega) \right\}.$$

Die differentielle Leitfähigkeit pro Flächeneinheit ist

$$\frac{dj_{Ns}}{dV} = \frac{e}{2\pi d^2} e^{-d(1-\frac{V}{2\phi})} N \left\{ S N_+(V) - S \eta V \sum_{\eta=0}^{N-1} \left(1 - \frac{\eta}{N}\right) e^{-\eta V \beta} N_+(V - \eta \omega) \Theta(V - \eta \omega) \right\} \quad (3.19)$$

wobei $N_+(E) = |E| / \sqrt{E^2 - \Delta^2}$ das Verhältnis von normaler zur BCS Zustandsdichte im rechten Supraleiter ist.

Wenn wir die Gln. (3.19) und (2.8) miteinander vergleichen, stellen wir fest, daß

1. die mit k_2 abnehmende Tunnelwahrscheinlichkeit den ersten Term, der für $\Delta = 0$ die übliche, praktisch konstante Leitfähigkeit angibt, um den Faktor S/N reduziert;
2. die Stufen in der Charakteristik bei $|V| = \eta \omega + \Delta$ durch die BCS Zustandsdichte vergrößert werden.

Die Singularität von $N_r(E)$ bei $|E| = \Delta$ wird in Experimenten nicht auftreten, weil vernachlässigte Effekte wie endliche Lebensdauer der Quasiteilchen u.a. sie verwischen. Wir können das durch eine "verschmierte" Zustandsdichte¹⁰⁾ beschreiben:

$$\tilde{N}(E) = \int N_r(E') \Delta(E'-E) dE' = \frac{1}{2\delta} \left[\sqrt{(E+\delta)^2 - \Delta^2} - \sqrt{(E-\delta)^2 - \Delta^2} \right] ;$$

hierbei ist $\Delta(E'-E) = \begin{cases} \frac{1}{2\delta} & \text{für } E-\delta < E' < E+\delta \\ 0 & \text{alle übrigen } E' \end{cases}$, und $\delta \ll \Delta$.

Wenn wir in Gl. (3.19) $N_r(E)$ durch $\tilde{N}(E)$ ersetzen und z.B.

$$\alpha = 2 \cdot 10^3 \text{ \AA} , \quad \alpha = 40 \text{ \AA} , \quad \epsilon_F \approx \psi \approx 1 \text{ eV}$$

$$\Delta = 10^{-3} \text{ eV} , \quad \delta = \frac{1}{9} \Delta$$

wählen, erhalten wir die in Fig. 2 gezeigte differentielle Leitfähigkeit.

b) Der dünne Film ist supraleitend

Dieser Fall kann näherungsweise diskutiert werden, wenn die Energielücke in dem dünnen Film, Δ_ℓ , viel kleiner ist als der Niveauabstand ω . Die Rechnung für $V > 0$ wird kurz skizziert.

Die Energie eines Quasiteilchens im dünnen Film mit dem Wellenvektor $\vec{k}$ unterhalb der Fermioberfläche ist

$$E_k = V - \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_\ell^2} \quad . \quad (3.20)$$

Wir nehmen an, daß wir die $\vec{k}_\parallel$ -Abhängigkeit von K vernachlässigen können, so daß wir in dem Stromausdruck (3.5) das durch Gl. (3.8) definierte Integral $\mathcal{J}$ zu berechnen haben. Bei $T = 0^\circ \text{K}$ führt die Substitution

$$u \equiv \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_\ell^2}$$

auf

$$\mathcal{J} = \frac{2m}{\hbar^2} \left\{ \int_{\Delta_\ell}^{V-\Delta_r} du \frac{V-u}{[(V-u)^2 - \Delta_r^2]^{1/2}} \cdot \frac{u}{[u^2 - \Delta_\ell^2]^{1/2}} - \int_{u(k_2)}^{V-\Delta_r} du \frac{V-u}{[(V-u)^2 - \Delta_r^2]^{1/2}} \cdot \frac{u}{[u^2 - \Delta_\ell^2]^{1/2}} \Theta(V-u(k_2)) \right\} , \quad (3.21)$$

wobei

$$u(k_z) \equiv \sqrt{\left[\epsilon_F - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right]^2 + \Delta_L^2} = \sqrt{(\eta\omega)^2 + \Delta_L^2} \approx \eta\omega$$

ist, wenn $\eta\omega \gg \Delta_L$ ist. Weil sich die beiden Integrale für $\eta=0$ gegenseitig aufheben, gilt die Näherung für $u(k_z)$ wenn $\omega \gg \Delta_L$ ist.

Im zweiten Integral ist $u^2 \gg \Delta_L^2$. Darum können wir

$$\frac{u}{[u^2 - \Delta_L^2]^{1/2}} \approx 1$$

setzen und die Integration durchführen.

Wir approximieren X durch den Wert in Gl. (3.14) und erhalten für die Stromdichte (3.5)

$$j_{ss} = \frac{e}{2\pi d^2} e^{-\frac{\alpha}{2}(1-\frac{V}{2\phi})} N \left\{ (s-1) \int_{\Delta_L}^{V-\Delta_r} d\omega \frac{V-\omega}{[(V-\omega)^2 - \Delta_r^2]^{1/2}} \frac{u}{[u^2 - \Delta_L^2]^{1/2}} - \sum_{\eta=1}^{N-1} \left(1 - \frac{\eta}{N}\right) e^{-\frac{\beta\eta}{2}} \frac{1}{\sqrt{(V-\eta\omega)^2 - \Delta_r^2}} \Theta(V-\eta\omega) \right\} \quad (3.22)$$

Wegen $\Delta_L \ll \omega$ findet der scharfe Abfall der Stromdichte bei etwa denselben Spannungswerten statt wie im Falle eines normalen dünnen Filmes. Die einzige Differenz zur Stromdichte (3.18) kommt vom ersten Integral, das den bekannten Tunnelstrom von Quasiteilchen zwischen zwei Supraleitern beschreibt¹¹⁾. Es kann durch elliptische Integrale ausgewertet werden, wenn $\Delta_L = \Delta_r$ ist.

4. Zusammenfassung

In einem dünnen Film der Dicke $d \lesssim 10^3 \text{ \AA}$ macht der endliche Abstand ω zwischen benachbarten Energieniveaus, die zu senkrecht auf die Oberfläche auffallenden Quasiteilchen gehören, die Zustandsdichte zu einer unstetigen Funktion der Energie. Dadurch wird die Charakteristik eines Tunnelkontakts, dessen eine Komponente ein dünner Film

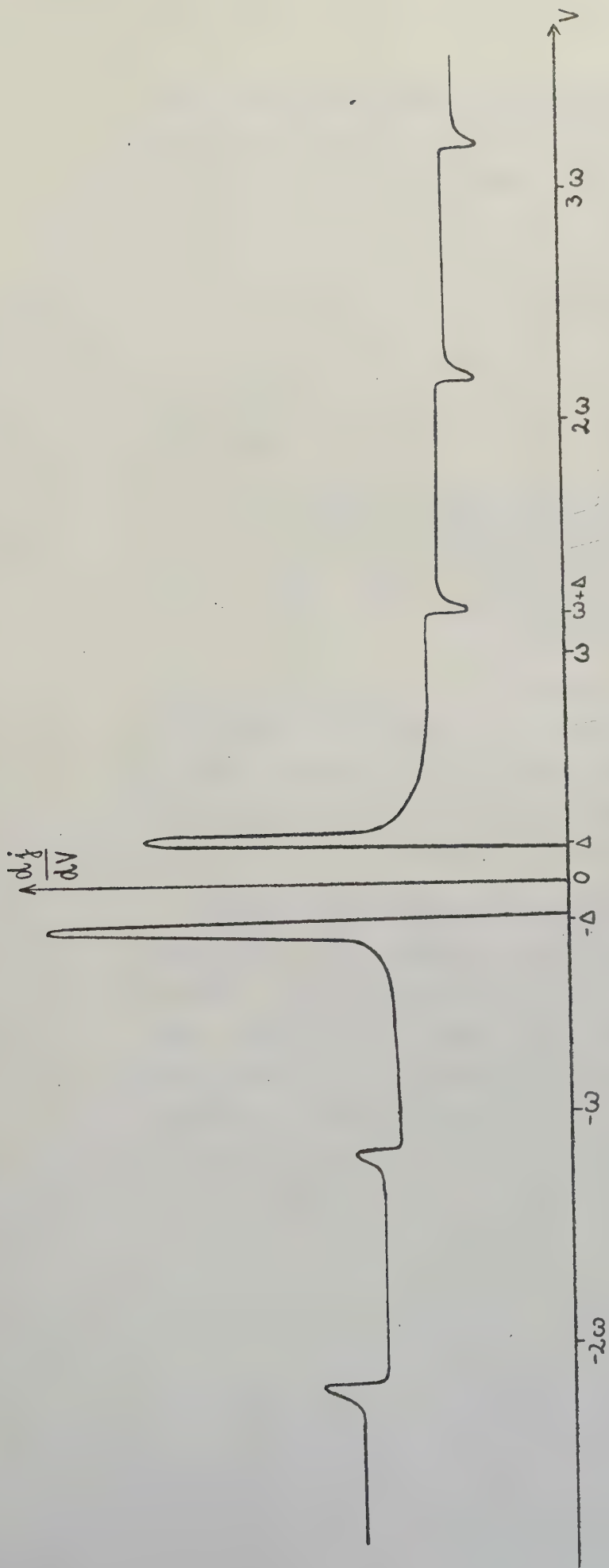


Fig. 2: Die differentielle Leitfähigkeit dI/dV eines Tunnelkontakts aus einem normalleitenden dünnen Film und einem supraleitenden Metall.

ist, immer dann drastisch geändert, wenn $V - \Delta$ ein ganzzahliges Vielfaches von $\omega = \frac{\hbar}{\alpha} \sqrt{2\epsilon_F/m}$ ist. Die Änderungen sind stufenförmig, wenn die andere Komponente des Kontakts ein normalleitendes dickes Metall ist ($\Delta=0$), und sie haben die Form von BCS Zustandsdichte-Kurven, wenn das dicke Metall supraleitend ist.

Durch eine Messung von ω kann man die Fermi-Energie ϵ_F mit einem Fehler $\delta\epsilon_F \leq \omega$ bestimmen, wenn die Quasiteilchen-Masse m und die Filmdicke α bekannt sind.

Die größte Schwierigkeit bei einem solchen Experiment wird die Herstellung eines dünnen Films konstanter Dicke sein, dessen äußere Fläche eben genug ist, um Quasiteilchen spiegelnd zu reflektieren, wie wir es angenommen haben. Ein Halbmetall wie Bi, an dessen Oberflächen tatsächlich spiegelnde Reflektion stattfindet¹²⁾, scheint am besten zur Herstellung eines solchen Filmes geeignet zu sein, weil darin die Quasiteilchen so lange Fermi-Wellenlängen haben, daß sie von Oberflächen-Rauhigkeiten und Störstellen nur schwach gestreut werden.

Gogadze und Kulik¹³⁾ haben Oszillationen im Tunnelstrom aus einem dünnen Film berechnet, die durch Quantisierung der Elektronen-Energie hervorgerufen werden. Obwohl ihre und die hier vorgelegte Arbeit sich mit demselben Effekt zu beschäftigen scheinen, ist ein Vergleich der Ergebnisse schwierig, weil ihre Tunnelcharakteristiken als integrierte Fourierreihen angegeben werden.

A N H A N G

DIE TUNNEL-WAHRSCHEINLICHKEIT VON QUASITEILCHEN

Seit Giaever's erster Veröffentlichung^{A 1)} über das Tunneln von Elektronen in Supraleiter hinein ist eine Fülle von Untersuchungen auf diesem Gebiet angestellt worden. Die ersten theoretischen Diskussionen dieses Problems wurden von Bardeen⁸⁾ A 2) und Cohen et al.^{A 3)} durchgeführt. Sie beschreiben, wie einzelne Quasiteilchen in Supraleiter hineintunneln. Bald darauf arbeitete Josephson^{A 4)} die Theorie der tunnelnden Supraströme aus, die dann durch viele Experimente bestätigt wurde. In unserem Falle sind wir aber nur am Tunneln von Quasiteilchen interessiert und leiten daher die Wahrscheinlichkeit für Tunnelprozesse auf der Grundlage der Bardeenschen Arbeit⁸⁾ her.

Wir betrachten einen Übergang des gesamten Elektronensystems in den beiden Metallen und der sie trennenden Isolierschicht von dem Vielteilchen-Zustand Ψ_0 in den Vielteilchen-Zustand $\Psi_{k k'}$. Die Vielteilchen-Wellenfunktion $\Psi_{k k'}$ beschreibt einen Gesamtzustand, in dem der in Ψ_0 besetzte angeregte Quasiteilchen-Zustand (k) leer und der in Ψ_0 leere angeregte Quasiteilchen-Zustand (k') besetzt ist. Dabei soll das Quasiteilchen in (k) auf der linken und das in (k') auf der rechten Seite der Isolierschicht lokalisiert sein. Alle übrigen Quasiteilchen-Zustände sind in Ψ_0 und $\Psi_{k k'}$ gleich besetzt. Darum geht das Vielteilchen-System von Ψ_0 nach $\Psi_{k k'}$ über, wenn ein Quasiteilchen von links nach rechts durch die Barriere tunnelt.

Wie noch näher begründet werden wird, kann man die Vielteilchen-Wellenfunktionen als proportional zu den Wellenfunktionen der einzelnen tunnelnden Quasiteilchen

annehmen. Eine Quasiteilchen-Wellenfunktion, die auf der linken Seite groß ist, nimmt in der Barriere exponentiell ab und setzt sich rechts mit einer kleinen Amplitude fort. Damit aber nicht schon eine endliche Tunnelwahrscheinlichkeit in die Wellenfunktion nullter Ordnung eingebaut ist, nehmen wir an, daß die Vielteilchen-Wellenfunktion Ψ_0 für eine Quasiteilchen-Anregung auf der linken Seite auf der rechten Seite stetig gegen Null strebt anstatt zu oszillieren. Für $\Psi_{k'k'}$ ist alles gerade umgekehrt. Daher ist Ψ_0 auf der linken Seite und in der Isolierschicht eine gute Eigenfunktion des Hamiltonoperators H für das Vielkörpersystem, während $\Psi_{k'k'}$ nur auf der rechten Seite und in der Barriere gültig ist.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Tunnelprozeß zwischen den beiden links und rechts der Barriere liegenden Quasiteilchen-Zuständen (k) und (k') wird in zeitabhängiger Störungstheorie erster Ordnung berechnet. Als Wellenfunktion aller Elektronen in dem Tunnelkontakt setzen wir an

$$\Psi(r,t) = a(t) \Psi_0(r) e^{-i\Omega_0 t} + \sum_{PP'} b_{PP'}(t) \Psi_{PP'}(r) e^{-i\Omega_{PP'} t} ;$$

$\hbar\Omega_i$ ist die gesamte Energie des Systems in dem durch $\Psi_i = \Psi_i(r) e^{-i\Omega_i t}$ beschriebenen Zustand.

Wir setzen $\Psi(r,t)$ in die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H \Psi$$

ein und erhalten

$$\begin{aligned} & i\hbar \dot{a} \Psi_0(r) e^{-i\Omega_0 t} + \hbar\Omega_0 \Psi_0(r) e^{-i\Omega_0 t} + \sum_{PP'} \left[i\hbar \dot{b}_{PP'} \Psi_{PP'} + \hbar\Omega_{PP'} b_{PP'} \Psi_{PP'} \right] e^{-i\Omega_{PP'} t} \\ &= a H \Psi_0 e^{-i\Omega_0 t} + \sum_{PP'} b_{PP'} H \Psi_{PP'} e^{-i\Omega_{PP'} t} \end{aligned}$$

Die Projektion auf den Zustand $\Psi_{kk'}$ führt zu

$$\left\{ i\hbar \dot{a} \int \Psi_{kk'}^* \Psi_0 d\tau - a \int \Psi_{kk'}^* (H - \hbar \Omega_0) \Psi_0 d\tau \right\} e^{-i(\Omega_0 - \Omega_{kk'})t} + i\hbar \dot{b}_{kk'}$$

$$= \sum_{pp'} b_{pp'} \int \Psi_{kk'}^* (H - \hbar \Omega_{pp'}) \Psi_{pp'} d\tau \cdot e^{-i(\Omega_{pp'} - \Omega_{kk'})t},$$

wobei $d\tau = d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n$ das Volumenelement des $3n$ -dimensionalen Konfigurationsraums ist, in dem sich die n Teilchen des Systems bewegen.

Wie in Fig. 1 angenommen wird, erstreckt sich die Isolierschicht von $-\frac{a}{2} \leq z \leq +\frac{a}{2}$. Im Gebiet $z < \frac{a}{2}$ ist $H\Psi_0 = \hbar\Omega_0\Psi_0$, weil Ψ_0 hier eine hinreichend genaue Eigenfunktion von H sein soll. Im Gebiet $z > -\frac{a}{2}$, in dem $\Psi_{pp'}$ Eigenfunktion von H ist, gilt $H\Psi_{pp'} = \hbar\Omega_{pp'}\Psi_{pp'}$.

Daher ist mit

$$T_{kk'} \equiv \int_{z > \frac{a}{2}} \Psi_{kk'}^* (H - \hbar\Omega_0) \Psi_0 d\tau, \quad \Delta_{pp',kk'} \equiv \int_{z < -\frac{a}{2}} \Psi_{kk'}^* (H - \hbar\Omega_{pp'}) \Psi_{pp'} d\tau$$

$$\dot{b}_{kk'} = \left\{ \frac{a(t)}{i\hbar} T_{kk'} - \dot{a} \int \Psi_{kk'}^* \Psi_0 d\tau \right\} e^{-i(\Omega_0 - \Omega_{kk'})t} + \frac{1}{i\hbar} \sum_{pp'} b_{pp'} \Delta_{pp',kk'} e^{-i(\Omega_{pp'} - \Omega_{kk'})t}.$$

Die Wellenfunktionen in $\Delta_{pp',kk'}$ sind beide klein, so daß dieser Term viel kleiner als $T_{kk'}$ ist und vernachlässigt werden kann. Wir machen die übliche störungstheoretische Annahme, daß sich das System zur Zeit $t = 0$ mit Sicherheit im Zustand Ψ_0 befindet und also $a(0) = 1$ und $b_{kk'}^{(0)} = 0$ ist. Bei kleinen angelegten Spannungen ist die Tunnelwahrscheinlichkeit klein, und $a(t)$ ändert sich zeitlich nur langsam. Darum kann auch das Produkt aus $\dot{a}$ und dem kleinen Überlappungsintegral vernachlässigt werden, so daß schließlich

$$\frac{d}{dt} b_{kk'}(t) = -\frac{i}{\hbar} T_{kk'} e^{-i(\Omega_0 - \Omega_{kk'})t} \quad (\text{A.1})$$

wird.

Die Integration der Gl. (A.1) liefert $T_{kk'}$ und damit die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit

$$P_{kk'} = \frac{|T_{kk'}|^2}{t} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{kk'}|^2 \delta(\hbar\Omega_{kk'} - \hbar\Omega_0), \quad (\text{A.2})$$

daß ein Quasiteilchen aus dem Zustand (k) links der Barriere in den leeren Zustand (k') rechts der Barriere tunnelt.

Die Energiedifferenz zwischen den beiden angeregten Vielkörper-Zuständen ist

$$\hbar\Omega_{kk'} - \hbar\Omega_0 = E_{k'} - E_k,$$

wenn E_k und $E_{k'}$ die Energien sind, die zu den linken und rechten Quasiteilchen-Zuständen gehören. Beide Energien sollen von der Fermi-Oberfläche des rechten Metalls gemessen werden; vgl. Fig. 1.

Wir können einen Null-Term zu $T_{kk'}$ addieren, indem wir die Integration bis zu irgendeinem Punkt z_B innerhalb der Barriere ausdehnen. Davon subtrahieren wir den Null-Ausdruck

$$\int_{z > z_B} \Psi_0 (H - \hbar\Omega_{kk'}) \Psi_{kk'}^* d\tau.$$

Weil wegen der durch Gl. (A.2) geforderten Energiehaltung $\hbar\Omega_0 = \hbar\Omega_{kk'}$ ist, können wir das Tunnel-Matrixelement schließlich als

$$T_{kk'} = \int_{z > z_B} [\Psi_{kk'}^* H \Psi_0 - \Psi_0 H \Psi_{kk'}^*] d\tau \quad (\text{A.3})$$

schreiben. In der Näherung der voneinander unabhängigen Quasiteilchen ist

$$\Psi_0 = \Psi_{00} \cdot \varphi_k, \quad \Psi_{kk'} = \Psi_{00} \cdot \varphi_{k'} \quad (\text{A.4})$$

wobei φ_k und $\varphi_{k'}$ die Wellenfunktionen der Quasiteilchen in den Quantenzuständen (k) und (k') sind und der Rest

der Elektronen durch die Wellenfunktion Ψ_{ov} beschrieben wird. Im supraleitenden Gebiet ist Ψ_{ov} das antisymmetrisierte Produkt von Paar-Wellenfunktionen. Die Wellenfunktionen in Gl. (A.4) entsprechen den durch Schrieffer in Gl. (2-52) seines Buches^{A 5)} angegebenen bis auf die fehlende Antisymmetrisierung in den Koordinaten von Ψ_k und $\Psi_{k'}$. Wir werden den Fermionen-Charakter der Quasiteilchen durch die Einführung der geeigneten statistischen Faktoren in die Tunnelwahrscheinlichkeit berücksichtigen.

Der Hamilton-Operator des n-Teilchensystems ist

$$H = - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 + V(r_1 \dots r_n) \quad (\text{A.5})$$

$V(r)$ beschreibt alle Potentiale, die auf die Elektronen in dem Tunnelkontakt wirken.

Wenn wir H in Gl. (A.3) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} T_{kk'} &= - \frac{\hbar^2}{2m} \int_{z > z_B} d\tau \left\{ \Psi_{kk'}^* \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 \Psi_0 - \Psi_0 \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 \Psi_{kk'}^* \right\} \\ &= - \frac{\hbar^2}{2m} \int_{z > z_B} d\tau_n \Psi_{k'}^* \Psi_k \int d\tau_1 \dots d\tau_{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{00}^* \nabla_i^2 \Psi_{00} \\ &\quad + \frac{\hbar^2}{2m} \int_{z > z_B} d\tau_n \Psi_k \Psi_{k'}^* \int d\tau_1 \dots d\tau_{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{00} \nabla_i^2 \Psi_{00}^* \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{2m} \int_{z > z_B} d\tau_n [\Psi_{k'}^* \nabla_n^2 \Psi_k - \Psi_k \nabla_n^2 \Psi_{k'}^*] \int d\tau_1 \dots d\tau_{n-1} |\Psi_{00}|^2 \end{aligned}$$

Die beiden ersten Terme ergeben zusammen null, weil

$$\sum_f^{n-1} (\Psi_{00}^* \nabla_f^2 \Psi_{00} - \Psi_{00} \nabla_f^2 \Psi_{00}^*) = i \sum_f^{n-1} \vec{\nabla}_f \left(\Psi_{00}^* \sum_{f'}^{n-1} \frac{\vec{\nabla}_{f'}}{i} \Psi_{00} - \Psi_{00} \sum_{f'}^{n-1} \frac{\vec{\nabla}_{f'}}{i} \Psi_{00}^* \right)$$

proportional zur Divergenz des Stroms im Grundzustand ist und daher verschwindet. In dem verbleibenden dritten Term ist

$$\int d\tau_1 \dots d\tau_{n-1} |\Psi_0|^2 = 1 ,$$

weil Ψ_0 als normiert angenommen wird. Daher kann $T_{kk'}$ als Integral über die Einzelteilchen-Wellenfunktionen φ_k und $\varphi_{k'}$ ausgedrückt werden ($d\tau_n \equiv d^3r$):

$$T_{kk'} = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{z=z_B} d^3r [\varphi_{k'}^* \nabla^2 \varphi_k - \varphi_k \nabla^2 \varphi_{k'}] . \quad (\text{A.6})$$

Wir können diesen Ausdruck umformen auf

$$T_{kk'} = -\frac{\hbar^2}{2m} \oint d\vec{\sigma} [\varphi_{k'}^* \vec{\nabla} \varphi_k - \varphi_k \vec{\nabla} \varphi_{k'}] ,$$

wobei $d\vec{\sigma}$ ein gerichtetes Element der Oberfläche ist, die das Integrationsvolumen umschließt. In den beiden Richtungen parallel zur Barriere nehmen wir periodische Randbedingungen an, gemäß denen die Wellenfunktionen auf den Oberflächen mit entgegengesetzt gleichen Normalenvektoren parallel zur Barriere identisch sind. Daher verschwindet das Integral über diese Oberflächen. Übrig bleibt das Integral über die beiden Oberflächen mit Normalen parallel zur z-Achse, deren eine weit von der Barriere entfernt im rechten Metall liegt, wo φ_k auf Null abgefallen ist. Daher liefert einzig das Integral über die Oberfläche durch z_B mit der Normalen in $-z$ -Richtung einen Beitrag zu $T_{kk'}$ und ergibt

$$T_{kk'} = \frac{\hbar^2}{2m} \int dx dy [\varphi_{k'}^* \frac{\partial}{\partial z} \varphi_k - \varphi_k \frac{\partial}{\partial z} \varphi_{k'}]_{z=z_B} . \quad (\text{A.7})$$

$T_{kk'}$ wird also allein durch den Wert der Wellenfunktion an einem Punkt z_B innerhalb der Isolierschicht bestimmt, und mit dem Matrix-Element des Stromdichte-Operators

$$J_{kk'}(z_B) = -\frac{i\hbar}{2m} \int d^3r [\varphi_{k'}^* \frac{\partial}{\partial z} \varphi_k - \varphi_k \frac{\partial}{\partial z} \varphi_{k'}] \delta(z-z_B)$$

kann es als

$$T_{kk'} = i\hbar \int_{kk'}(z_B)$$

geschrieben werden.

Zur weiteren Berechnung des Matrix-Elements beschreiben wir die Quasiteilchen als voneinander unabhängige Elektronen, deren Wellenfunktionen der Schrödingergleichung

$$E\psi = -\left[\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \mu\right]\psi + U(z)\psi$$

genügen; als Energienullpunkt wird die Fermi-Energie μ des rechten Metalls gewählt und $U(z)$ bedeutet das Potential der Isolierschicht plus die angelegte äußere Spannung $V \ll \mu$. Die Gleichung soll im ganzen Tunnelkontakt $-d - \frac{a}{2} < z < L + \frac{a}{2}$ gelten, wobei a , d und L die Dicken der Isolierschicht, des linken Films und des rechten Metalls bedeuten. Diese Annahme ist gerechtfertigt, weil in das Matrix-Element nur die Wellenfunktionen in der Barriere eingehen, wo in guter Näherung die Elektronen einzeln betrachtet werden können.

Im Gebiet $-d - \frac{a}{2} < z < +\frac{a}{2}$ setzen wir an

$$\psi_k(r) = e^{ik_{||}z} w(z),$$

wobei $k_{||} \equiv k_x x + k_y y$ ist. Mit

$$k(z) \equiv \frac{1}{\hbar} \left\{ 2m [E_k + \mu - U(z)] - k_{||}^2 \right\}^{1/2} \quad \text{für } U(z) < E_k + \mu - \frac{k_{||}^2}{2m} \quad (\text{A.8})$$

$$\kappa(z) \equiv \frac{1}{\hbar} \left\{ 2m [U(z) - E_k - \mu] + k_{||}^2 \right\}^{1/2} \quad \text{für } U(z) > E_k + \mu - \frac{k_{||}^2}{2m}$$

ist die Schrödinger-Gleichung im Gebiet $z < -a/2$

$$\frac{d^2}{dz^2} w + k^2(z) w = 0$$

und im Gebiet $-a/2 < z < +a/2$

(A.9)

$$\frac{d^2}{dz^2} w - \kappa^2(z) w = 0.$$

Hierbei nehmen wir an, daß das Potential der Isolierschicht so schnell an den klassischen Umkehrpunkten $z = \pm \frac{a}{2}$

ansteigt, in denen $k(\pm a/2) = 0 = K(\pm a/2)$ ist, daß diese nahezu unabhängig von der Quasiteilchen-Energie sind.

Wir lösen die Gln. (A.9) in der WKB Näherung und verwenden die asymptotischen Ausdrücke der geeigneten Linearkombinationen von Wellenfunktionen, die sich glatt bei $z = -a/2$ aneinander anschließen und für $z > a/2$ exponentiell verschwinden. Sie sind

$$\begin{aligned} \psi_R(z < -\frac{a}{2}) &= C e^{ik_0 s} k_2^{-1/2} \cos\left(\int_z^{-a/2} k(z) dz - \frac{\pi}{4}\right) \approx C k_2^{-1/2} \cos\left[k_2(z + \frac{a}{2}) + \frac{\pi}{4}\right] e^{ik_0 s} \\ \psi_R(z > \frac{a}{2}) &= \frac{1}{2} C e^{ik_0 s} K(z)^{-1/2} \exp\left(-\int_{a/2}^z K(z) dz\right); \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

hierbei haben wir $k(z)$ durch $k_2 = \frac{1}{d} \{2m[E_R + \mu - V] - k_{||}^2\}^{1/2}$ ersetzt, was wegen $U(z) = V$ für nahezu alle $z < -\frac{a}{2}$ keine schlechte Näherung ist.

$$C = \left(\frac{2 k_2}{A d}\right)^{1/2} \quad (\text{A.11})$$

ist die Normierungskonstante und A die Oberfläche des Films.

Wir nehmen an, daß die Oberfläche des linken Films bei $z = -a - a/2$ die Elektronen spiegelnd reflektiert und damit die Randbedingung

$$\psi_R(z = -a - \frac{a}{2}) = 0$$

festlegt. Also muß

$$k_2 d - \frac{\pi}{4} = (2n' + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n' = 0, 1, 2, \dots$$

sein oder

$$k_2 = \left(n - \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{d}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.12})$$

Die Energieeigenwerte in dem linken Film sind demnach

$$E_R = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(n - \frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 + k_{||}^2 \right] + V - \mu \quad (\text{A.13})$$

Für große n ist der Abstand zwischen zwei benachbarten

Energieniveaus bei konstantem $k_{||}$ in guter Näherung gleich ω aus Gl. (1.2), und wir können k_z durch $n\pi/d$, n ganz, approximieren.

Die Wellenfunktion $\varphi_{k'}$, die ein Quasiteilchen im rechten Metall und in der Barriere beschreibt, wird auf dieselbe Weise berechnet wie φ_k und ist

$$\begin{aligned}\varphi_{k'}(z < a/2) &= \frac{1}{2} C' e^{ik'_z s} \kappa'(z)^{-1/2} \exp\left(-\int_z^{a/2} \kappa'(z) dz\right) \\ \varphi_{k'}(z > a/2) &= C' e^{ik'_z s} k_z'^{-1/2} \cos\left(k'_z(z - a/2) - \frac{\pi}{4}\right); \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

dabei gilt

$$\begin{aligned}C' &= \left(\frac{2k_z'}{AL}\right)^{1/2} \\ k_z' &= \frac{1}{\hbar} \left\{ 2m[E_{k'} + \mu] - k_{||}^2 \right\}^{1/2} \\ \kappa'(z) &= \frac{1}{\hbar} \left\{ 2m[U(z) - E_{k'} - \mu] + k_{||}^2 \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Wenn wir die so berechneten Wellenfunktionen in die Gl. (A.7) für das Tunnel-Matrixelement einsetzen, sehen wir, daß $T_{kk'}$ nur dann von Null verschieden ist, wenn $k_{||} = k'_{||}$ ist. Weil auch die Energie erhalten bleiben muß, ist also

$$\kappa(z) = \kappa'(z)$$

Die Exponentialfunktion $\exp\left\{-\int_{-a/2}^{+a/2} \kappa(z) dz\right\}$ in $T_{kk'}$ können wir noch weiter vereinfachen, wenn wir annehmen, daß $U(z)$ so dicht bei $z = \pm a/2$ auf seinen Maximalwert U_0 ansteigt, daß wir in der ganzen Isolierschicht $U(z) \approx U_0$ setzen können. (Freilich muß der Anstieg noch schwach genug sein, um die WKB Näherung zu erlauben.) Dann ist das Tunnel-Matrixelement⁹⁾ mit

$$K = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E_k - \mu) + k_{||}^2 \hbar^2} \quad (\text{A.15})$$

gleich

$$T_{k k'} = -\frac{\frac{1}{2} \hbar^2}{\sqrt{\alpha} L} \frac{(k_z k'_z)^{1/2}}{m} e^{-\kappa a} \delta_{k_{||}, k'_{||}} .$$

Bei Berücksichtigung des Pauli-Prinzips durch die Fermische Verteilungsfunktion

$$f(E) = \left[e^{\frac{E - E_F}{k_B T}} + 1 \right]^{-1}$$

erhalten wir mit $P_{k k'}$ aus Gl. (A.2) die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit für einen Tunnelübergang vom linken Film ins rechte Metall als

$$W_{l \rightarrow r} = \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} P_{k k'} f(E_k - V) (1 - f(E_{k'}))$$

und vom rechten Metall in den linken Film als

$$W_{r \leftarrow l} = \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} P_{k' k} f(E_{k'}) (1 - f(E_k - V)) .$$

Wegen der Gl. (A.15) ist $P_{k' k} = P_{k k'}$, so daß die effektive Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit für einen Tunnelübergang von links nach rechts durch

$$W = W_{l \rightarrow r} - W_{r \leftarrow l} = \frac{\frac{1}{2} \pi \hbar^3}{L \alpha m^2} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} k_z k'_z e^{-2\kappa a} \delta_{\vec{k}_{||}, \vec{k}'_{||}} \delta(E_k - E_{k'}) [f(E_k - V) - f(E_{k'})] \quad (A.16)$$

angegeben wird. Die Deltafunktion $\delta(E_k - E_{k'})$ und das Kronecker-Symbol $\delta_{\vec{k}_{||}, \vec{k}'_{||}}$ sorgen für die Erhaltung der Energie und des Impulses parallel zur Isolierschicht.

LITERATURVERZEICHNIS

- 1) Ogrin, Yu.F., V.N. Lutski und M.J. Elinson: JETP Letters 3, 114 (1966); engl. Übersetzung in: Soviet Physics JETP Letters 3,71 (1966)
- 2) Sandomirskii, V.B.: JETP 43, 2309 (1962); engl. Übersetzung in: Soviet Physics JETP 16, 1631 (1963) und: JETP 52, 158 (1967); engl. Übersetzung in: Soviet Physics JETP 25, 101 (1967)
- 3) Thompson, C.J. und J.M. Blatt: Phys. Lett. 5, 6 (1963)
- 4) Paskin, A. und A.D. Singh: Phys. Rev. 140, A 1965 (1965)
- 5) Tomasch, W.J.: Phys. Rev. Lett. 15, 672 (1965); Phys. Rev. Lett. 16, 16 (1966)
- 6) McMillan, W.L. und P.W. Anderson: Phys. Rev. Lett. 16, 85 (1966)
- 7) Wolfram, T. und G.W. Lehman: Phys. Lett. 24 A, 101 (1967)
- 8) Bardeen, J.: Phys. Rev. Lett. 6, 57 (1961)
- 9) Harrison, W.A.: Phys. Rev. 123, 85 (1961)
- 10) Hebel, L.C. und C.P. Schlichter: Phys. Rev. 113, 1504 (1961)
- 11) Nicol, J., I. Shapiro und P.H. Smith: Phys. Rev. Lett. 5, 461 (1960)
- 12) Friedman, A.N. und S.H. Koenig: J. Res. and Develop. 4, 158 (1960)
- 13) Gogadze, G.A. und J.O. Kulik: Fizika Tverdogo Tela 7, 432 (1965); engl. Übersetzung in: Soviet Physics-Solid State 7, 345 (1965)

- A 1) Giaever, I: Phys. Rev. Lett. 5, 147 (1960)
- A 2) Bardeen, J.: Phys. Rev. Lett. 9, 147 (1962)
- A 3) Cohen, M.H., L.M. Falicov und J.C. Philips:
Phys. Rev. Lett. 8, 316 (1962)
- A 4) Josephson, B.D.: Phys. Lett. 1, 251 (1962)
Rev. Mod. Phys. 36, 216 (1964)
- A 5) Schrieffer, J.R.: Theory of Superconductivity,
W.A. Benjamin Inc., New York, 1964; S. 48

T E I L B

UNTERSUCHUNGEN ZUM ZWISCHENZUSTAND UND GEMISCHTEN
ZUSTAND VON SUPRALEITERN I. UND II. ART

Einleitung

Der gemischte Zustand von Supraleitern II. Art wurde 1957 von Abrikosov¹⁾ aus den Lösungen der Ginzburg-Landau Gleichungen erkannt. Er ist dadurch gekennzeichnet, daß ein magnetisches Feld $\vec{H}$, das zwischen den Grenzfeldstärken H_{C1} und H_{C2} liegt, den Supraleiter in Form quantisierter Flußlinien durchdringt, die von kreisenden Supraströmen oder Wirbeln umgeben sind²⁾. Der Bewegung dieser Fluß- oder Wirbellinien in einem Transportstrom, der stark genug ist, um sie von Fehlstellen des Kristalls loszulösen, wurden in letzter Zeit eine Reihe experimenteller und theoretischer Untersuchungen gewidmet³⁻⁶⁾. Am detailliertesten beschreibt die lokale Theorie von Bardeen und Stephen⁴⁾ die Wirbelbewegung, doch wurden von Nozieres und Vinen⁵⁾ Einwände dagegen erhoben, die Vinen und Warren⁶⁾ wiederholten und ergänzten. Einen ihrer Einwände formulieren sie sinngemäß folgendermaßen⁵⁾.

Wie bei Bardeen und Stephen soll ein extremer Supraleiter II. Art untersucht werden, in dem die Kohärenzlänge ξ_0 viel kleiner ist als die Eindringtiefe λ des Magnetfeldes. Die Temperatur wird als sehr niedrig, $T \approx 0^\circ K$, angenommen, das Material soll homogen und sauber sein, so daß sich der Wirbel frei bewegen kann und die mittlere freie Weglänge der Elektronen $\ell \gg \xi_0$ ist. Unter diesen Umständen wird von Nozieres und Vinen gezeigt, daß ein Wirbel, der sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_L$ in einem Suprastrom mit der Transportgeschwindigkeit $\vec{v}_T$ bewegt, aus Gründen des Impulsgleichgewichts einer äußeren Kraft pro Längeneinheit

$$\vec{F} = \frac{n_s e}{c} (\vec{v}_T - \vec{v}_L) \times \vec{\Phi}$$

unterworfen ist, die als Magnus Kraft verstanden werden kann; n_s ist die Dichte der supraleitenden Elektronen, und $\phi = \frac{hc}{2e}$ ist das magnetische Flußquant, das in einer Linie enthalten ist.

Im Gleichgewicht muß $\vec{F}$ durch eine Reibungskraft $\vec{f}$ aufgehoben werden, so daß

$$\vec{F} + \vec{f} = 0$$

ist. Von den beiden möglichen Ursachen für $\vec{f}$ scheidet Reibung an normalen Elektronen bei $T=0^\circ\text{K}$ aus, so daß nur Reibung mit dem Gitter in Frage kommt. Die Kraft auf das Gitter, das als ein gleichförmiger Untergrund positiver Ladung betrachtet wird, setzt sich aus der elektrostatischen Komponente und der Reaktion auf die Reibungskraft zusammen. Sie ist

$$\vec{F}_{\text{latt}} = \frac{n_s e}{c} \vec{v}_L \times \vec{\phi} - \vec{f}$$

und wird mit den beiden vorangegangenen Gleichungen zur Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_{\text{latt}} = \frac{n_s e}{c} \vec{v}_T \times \vec{\phi} .$$

Nozieres und Vinen weisen darauf hin, daß diese Kraft in der Bardeen-Stephen Theorie nicht auftritt, und sie stellen die Frage, ob und wie das Modell von Bardeen und Stephen einen dieser Kraft entsprechenden Impulsverlust der Elektronen an das Gitter beschreiben kann. Im ersten und zweiten Kapitel der vorliegenden Arbeit werden wir versuchen, eine Antwort auf diese Frage zu geben.

In der lokalen Theorie von Bardeen und Stephen fließt der Transport-Strom durch den Wirbelkern. Er ändert sich von einem Suprastrom in einen Normalstrom und umgekehrt, wenn er durch die Grenzflächen des Wirbelkerns tritt. Die Kerngrenze trennt den im wesentlichen normalen Kern, in dem das Paarpotential $\Delta(r) = 0$ ist, von dem supraleitenden Gebiet mit endlichem $\Delta(r)$; siehe Fig. 1.

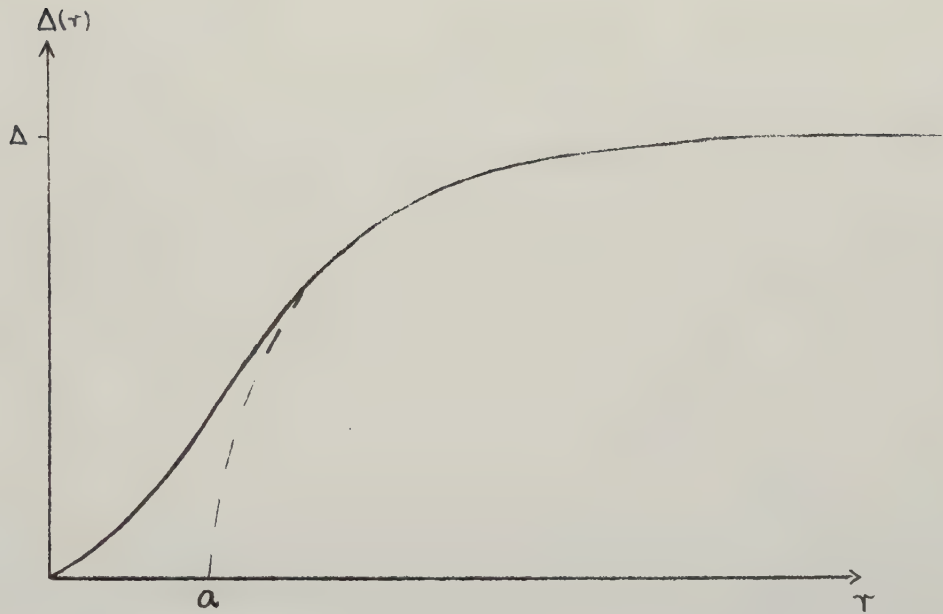


Fig. 1: Die räumliche Änderung des Paarpotentials $\Delta(r)$ im lokalen Modell eines Wirbels - gestrichelte Linie - und im nichtlokalen Modell - ausgezogene Linie; r ist die radiale Koordinate eines zylindrischen Koordinatensystems r, θ, z ; bei $r = \alpha$ liegt die Kerngrenze; nach Bardeen und Stephen⁴⁾.

Einen Mechanismus der Impulsübertragung von den Elektronen auf das Gitter kann man nun in den Übergängen des Transportstroms zwischen Normal- und Suprastrom vermuten. Um das zu zeigen, wollen wir annehmen, daß die dynamischen Prozesse in einer ebenen Phasengrenze grundsätzlich die gleichen sind wie die in einer Wirbelkerngrenze. Wenn dann ein Strom aus einem halb-unendlichen normalen Gebiet in ein halb-unendliches supraleitendes Gebiet fließt und die Anregungsenergien der Quasiteilchen, die den Strom tragen, kleiner als der Höchstwert Δ des Paarpotentials sind, dann zerfallen die Quasiteilchen in dem supraleitenden Gebiet und werden an der Phasengrenze reflektiert⁷⁻⁹⁾. Da, wie Andreev gezeigt hat, ein "Loch" reflektiert wird, wenn ein "Elektron" einfällt⁹⁾ - ein Prozess, der sich bemerkenswert von der Reflektion an einem gewöhnlichen Potential unterscheidet, - kann die Ladung nur dann erhalten werden, wenn die zerfallenden Quasiteilchen einen Suprastrom induzieren. Waltons Experimente¹⁰⁾ über die thermische und elektrische Leitfähigkeit im Zwischenzustand von Supraleitern I. Art unterstützen diese Anschauung. Die Ladungserhaltung verlangt aber nur, daß Strom und Impuls senkrecht zur Phasengrenze erhalten werden. Daher kann der Impuls parallel zur Phasengrenze durchaus mit dem zerfallenden Quasiteilchen-Strom verschwinden. - Da es genügt, die Bewegung eines Quasiteilchens im Strom zu kennen, werden wir im I. Kapitel die gekoppelten Gleichungen für die zeitabhängigen Quasiteilchen-Wellenfunktionen herleiten, die die Möglichkeit der Induktion eines Suprastroms durch ein zerfallendes Quasiteilchen enthalten, und in einem idealisierten Modell der ebenen Phasengrenze untersuchen, ob der räumliche Abfall des Impulses parallel zur Phasengrenze mit einer zeitlichen Änderung des Gesamtimpulses des Systems verbunden ist und damit auf eine Kraft in der Phasengrenze hinweist. Wir werden aber sehen, daß das nicht der Fall ist, so daß der reine Übergang zwischen Normal- und Supraströmen nicht mit einer Impulsabgabe an das Gitter verbunden ist.

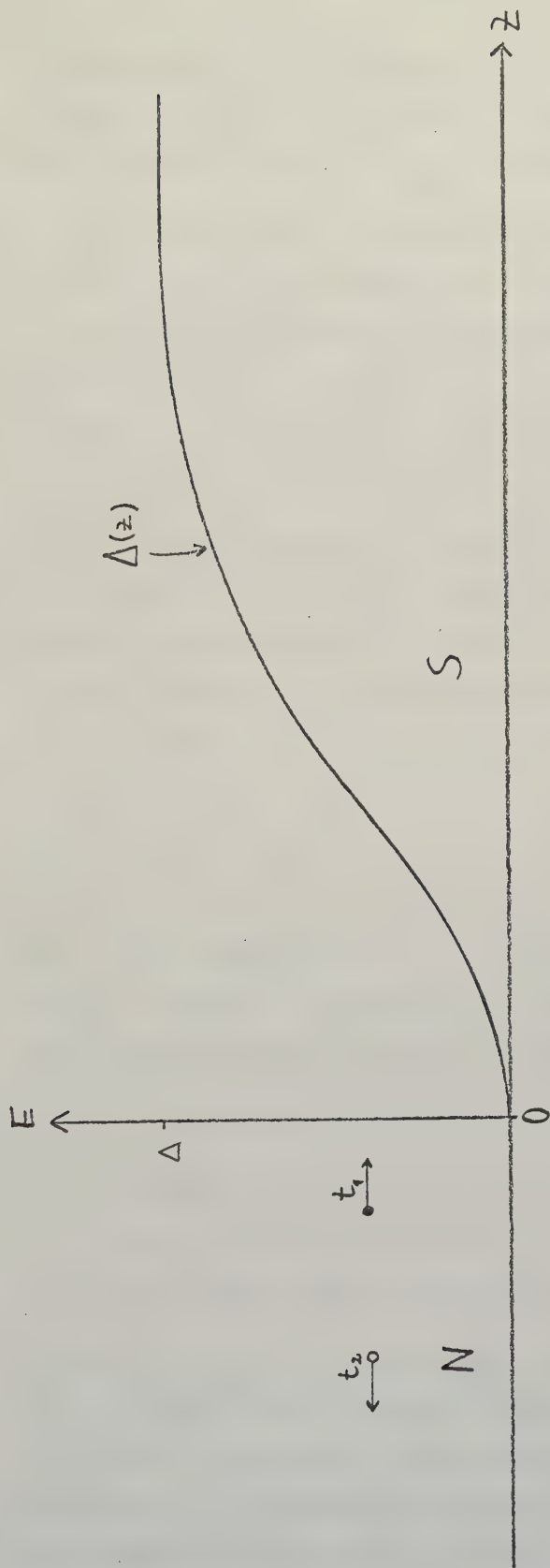


Fig. 2: Zur Zeit t_1 fällt ein Elektron mit der Energie $E < \Delta$ auf die Phasengrenze zwischen einem normalen (N) und einem supraleitenden Gebiet (S). Es kann in den Supraleiter nicht eindringen, sondern wird als Loch reflektiert. Zur Zeit $t_2 > t_1$ entfernt sich das Loch von der Phasengrenze. Seine Geschwindigkeit ist in allen drei Komponenten der Elektronengeschwindigkeit entgegengerichtet.

Im zweiten Kapitel werden wir dann zeigen, wie Entpaarungsprozesse in den kritischen Wirbelströmen um den Wirbelkern die gesuchte Kraft $\vec{F}_{\text{latt}}$ auf das Kristallgitter liefern.

Da in den oben erwähnten Kritiken der Bardeen-Stephen Theorie auch das Konzept des lokalen Gleichgewichts der Elektronen im Wirbelkern angegriffen wird, wäre es wünschenswert, mit einer mikroskopischen Theorie der Wirbelbewegung die Aussagen von Bardeen und Stephen zu prüfen. Voraussetzung dafür ist die Kenntnis des Energiespektrums im Supraleiter II. Art. Dieses Spektrum ist bereits von Caroli, de Gennes und Matricon²²⁾, Caroli und Matricon²³⁾ und Cyrot²⁴⁾ gründlich diskutiert worden, doch behaupten Caroli und Matricon²³⁾, daß die gebundenen Zustände negativer Energie für kleine Quasiteilchen-Drehimpulse parallel zum rotierenden Suprastrom unphysikalisch sind. Unsere Berechnungen der Energiespektren für die gebundenen Quasiteilchen im stromführenden Zwischenzustand von Supraleitern I. Art und im gemischten Zustand von Supraleitern II. Art werden aber Gründe dafür liefern, daß bestimmte Zustände negativer Energie als physikalisch sinnvoll angesehen werden müssen und von ungepaarten Mitgliedern des Grundzustandes besetzt werden.

I. Stromfluß durch die ebene Phasengrenze zwischen einem normalen und einem supraleitenden Gebiet

1. Herleitung der zeitabhängigen Quasiteilchen-Gleichungen

Stationäre Wellengleichungen der Quasiteilchen sind die sogenannten "Bogoliubov Gleichungen"¹¹⁾¹²⁾; ihre zeitabhängigen Versionen wurden von Andreev⁹⁾ und Mathews¹³⁾ angegeben. Allerdings kann man diese Gleichungen nicht ohne weiteres benutzen, um die Induktion eines Suprastromes durch ein zerfallendes Quasiteilchen zu beschreiben. Darum leiten wir uns hier die zeitabhängigen Gleichungen in der geeigneten Form her.

Ein System von Elektronen, die aufeinander über die momentane Wechselwirkung

$$V(x_1, x_2) = V(r_1, r_2) \delta(t_1 - t_2) \quad (1.1)$$

einwirken, hat im elektromagnetischen Feld des Vektorpotentials $\vec{A}(r_1, t)$ die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_{\alpha} \int d^3x_1 \Psi_{\alpha}^{\dagger}(x_1) \left\{ \frac{1}{2m} \left[\vec{p}_1 - \frac{e}{c} \vec{A}(x_1) \right]^2 + U_0(x_1) - \mu \right\} \Psi_{\alpha}(x_1) \quad (1.2)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \int d^3x_1 \int d^3x_2 \Psi_{\alpha}^{\dagger}(x_1) \Psi_{\beta}^{\dagger}(x_2) V(x_1, x_2) \Psi_{\beta}(x_2) \Psi_{\alpha}(x_1) ;$$

hierbei ist $\vec{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla$ der Operator des kanonischen Impulses - wir wählen die Einheiten so, daß $\hbar = 1$ ist -, und e ist die Ladung eines Elektrons; $\Psi_{\sigma}^{\dagger}(x)$ und $\Psi_{\sigma}(x)$ sind die elektronischen Feldoperatoren, die am Raum-Zeit Punkt $x = (r, t)$ ein Elektron mit Spin σ erzeugen und vernichten; das chemische Potential μ wird als Nullpunkt für die Energie des Systems gewählt, und $U_0(x)$ ist ein Ein-Elektron-Potential, das die Wirkungen des Kristall-Potentials, von Skalar-Potentialen usw. enthalten kann.

Die Bewegungsgleichung eines Feldoperators wird durch Heisenbergs Vertauschungsrelation

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\sigma}(x) = [\Psi_{\sigma}(x), H] \quad (1.3)$$

gegeben. Die Gln. (1.2) und (1.3) liefern

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\sigma}(x) = \left[\frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + U_0(x) - \mu \right] \Psi_{\sigma}(x) + \sum_{\alpha} \int d^3x_1 \Psi_{\alpha}^{\dagger}(x_1, t) V(x_1, x) \Psi_{\alpha}(x_1, t) \cdot \Psi_{\sigma}(x) \quad (1.4a)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\sigma}^{\dagger}(x) = - \left[\frac{1}{2m} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + U_0(x) - \mu \right] \Psi_{\sigma}^{\dagger}(x) - \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}^{\dagger}(x) \cdot \int d^3x_1 \Psi_{\alpha}^{\dagger}(x_1, t) V(x_1, x) \Psi_{\alpha}(x_1, t) . \quad (1.4b)$$

Wir nehmen an, daß das Viel-Elektronen System die folgenden Eigenschaften hat:

1. Die Wechselwirkung (1.1) ist die von Phononen vermittelte anziehende Wechselwirkung der BCS Theorie¹⁴⁾ und kann durch das Kontaktpotential

$$V(\tau_1, \tau) = -V \delta(\tau_1 - \tau), \quad V > 0, \quad (1.5)$$

angenähert werden⁺).

2. Der Grundzustand besteht aus einem Kondensat gepaarter Fermionen, in dem die Paarpartner zueinander konjugierte Quantenzustände besetzen.

Die Paarungswahrscheinlichkeit, die in selbstkonsistenter Weise durch einen Ordnungsparameter Δ definiert werden wird, geht in den normalen Gebieten gegen Null.

3. Wir beschäftigen uns mit einem schwach koppelnden Supraleiter, in dem das Quasiteilchen-Bild gültig ist. Anregungen des Systems können dadurch erzeugt werden, daß man ungepaarte Elektronen zum Grundzustand hinzufügt oder daraus herauszieht. Wir lassen die Möglichkeit zu, daß eine Quasiteilchen-Anregung in die Kollektivanregung eines Suprastroms übergeht, wenn das Quasiteilchen in dem supraleitenden Gebiet zerfällt.
4. Angeregte Zustände des Systems, die verschiedene Quasiteilchen-Anregungen enthalten, sind zueinander orthogonal.

Wir beschreiben eine Gleichgewichtskonfiguration von angeregten Quasiteilchen bei der Temperatur T durch das Symbol $|T\rangle$ und definieren $|T_{\ell\sigma}\rangle$ als die Konfiguration eines gestörten Gleichgewichts, in der der Quasiteilchen-Zustand $(\ell\sigma)$ mit den Quantenzahlen ℓ und dem Spin σ mit Sicherheit besetzt ist und alle anderen Quasiteilchen-Zustände wie in $|T\rangle$ besetzt sind. Wir schachteln die Bewegungsgleichungen der Feldoperatoren (1.4a) und (1.4b)

⁺) Mathews¹³⁾ hat den allgemeineren Fall diskutiert, in dem die Wechselwirkung räumlich ausgedehnt ist. Wir folgern aus seiner Arbeit, daß die Näherung (1.5) in den meisten Fällen hinreichend gut ist.

zwischen $|T\rangle$ und $|T_{k\sigma}\rangle$ und beachten, daß für jeden Operator "Op"

$$\langle T | \text{Op} | T_{k\sigma} \rangle = \sum_{\Phi} P_{\Phi}(\tau) \langle \Phi | \text{Op} | \Phi_{k\sigma} \rangle \quad (1.6)$$

gilt, wobei die Summe über alle orthonormalen Vielteilchenzustände $|\Phi\rangle$ des Systems geht, in denen der Quasiteilchen-Zustand $(k\sigma)$ mit Sicherheit leer ist; in $|\Phi_{k\sigma}\rangle$ sind dieselben Quasiteilchen-Zustände wie in $|\Phi\rangle$ und zusätzlich noch $(k\sigma)$ besetzt; die Verteilungsfunktion $P_{\Phi}(\tau)$ für das Gleichgewicht gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der sich das System bei der Temperatur T in dem Zustand $|\Phi\rangle$ befindet; es gilt

$$\sum_{\Phi} P_{\Phi}(\tau) = 1 \quad .$$

Wegen der Vielteilchenwechselwirkung in dem System bewegt sich jedes Quasiteilchen in dem Feld, das die anderen Teilchen erzeugen. Um einen vollständigen, orthonormalen Satz von Eigenvektoren $|\Phi\rangle$ des Systems zu haben, müssen wir den Hilbertraum, den sie aufspannen, auf ein bestimmtes Feld und somit auf eine bestimmte Konfiguration von Quasiteilchen spezifizieren⁺⁾ . Diese Konfiguration ist in unserem Fall $|T_{k\sigma}\rangle$. Darum nehmen wir an, daß sich die Anregungen aller Zustände $|\Phi\rangle$ im Felde der Konfiguration $|T_{k\sigma}\rangle$ bewegen.

Ähnlich wie Andreev⁹⁾ definieren wir die Quasiteilchen-Wellenfunktionen durch die Matrix-Elemente

$$\langle \Phi | \Psi_{\sigma}(x) | \Phi_{k\sigma} \rangle \equiv f_{k\sigma}(x), \quad \langle \Phi | \Psi_{-\sigma}^{\dagger}(x) | \Phi_{k\sigma} \rangle \equiv \psi_{k\sigma}(x). \quad (1.7)$$

Das erste Matrix-Element ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude für den Übergang des Vielteilchenzustandes $|\Phi_{k\sigma}\rangle$

⁺⁾ Ich danke Herrn Professor Bardeen, daß er mich darauf aufmerksam gemacht hat.

in den Zustand $|\phi\rangle$, wenn man $|\phi_{\ell\bar{s}}\rangle$ ein Elektron mit Spin $\bar{s}$ am Raum-Zeit Punkt $X=(\tau, t)$ entzieht. Darum können wir $\phi_{\ell\bar{s}}(x)$ als die Wellenfunktion für die "elektronenartige Komponente" des Quasiteilchens im Zustand $(\ell\bar{s})$ bezeichnen.

Das zweite Matrix-Element ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude für den Übergang $|\phi_{\ell\bar{s}}\rangle \rightarrow |\phi\rangle$, wenn ein Elektron mit dem Spin- $\bar{s}$ zu $|\phi_{\ell\bar{s}}\rangle$ am Punkte x hinzugefügt wird. Darum kann $\psi_{\ell\bar{s}}(x)$ als die Wellenfunktion für die "lochartige Komponente" der Quasiteilchen-Anregung im Zustand $(\ell\bar{s})$ angesehen werden.

Wir betonen, daß die Wahrscheinlichkeitsamplituden (1.7) für die Vernichtung der elektronen- und lochartigen Komponenten der Quasiteilchen-Anregung nicht von den anderen Quasiteilchen im Zustand $|\phi\rangle$ abhängen, sondern von der Gesamtkonfiguration $|\tau_{\ell\bar{s}}\rangle$.

Wir betrachten diejenigen Zustände als identisch, welche dieselben Anregungen haben, sich aber in der Zahl der kondensierten Paare unterscheiden. Es wäre einfach, die Matrix-Elemente mit paarerhaltenden Operatoren¹⁵⁾ zu definieren, aber weil das nichts ändert, sparen wir uns die zusätzliche Schreibarbeit.

Im Mittelwert des Produkts der drei Feldoperatoren in Gl. (1.4a), $\langle \tau | \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}^{\dagger}(x) \Psi_{\alpha}(x) \Psi_{\bar{s}}(x) | \tau_{\ell\bar{s}} \rangle$, ist wegen der Antikommutationseigenschaften der Feldoperatoren nur der Term mit $\alpha = -\bar{s}$ von Null verschieden und kann mit Hilfe von Gl. (1.6) und der Entwicklung

$$\begin{aligned} M_1^{\phi} &\equiv \langle \phi | \Psi_{-\bar{s}}^{\dagger}(x) \Psi_{-\bar{s}}(x) \Psi_{\bar{s}}(x) | \phi_{\ell\bar{s}} \rangle = \\ &= \sum_{\phi', \phi''} \langle \phi | \Psi_{-\bar{s}}^{\dagger} | \phi'' \rangle \langle \phi' | \Psi_{-\bar{s}} | \phi' \rangle \langle \phi' | \Psi_{\bar{s}} | \phi \rangle \end{aligned} \quad (1.8)$$

ausgewertet werden; dabei bilden $|\phi'\rangle$ und $|\phi''\rangle$ jeweils

einen vollständigen, orthonormalen Satz von Zustandsvektoren in dem Hilbertraum, der auf $|\tau_{\ell\sigma}\rangle$ spezifiziert ist. Weil das System die Eigenschaft 4) hat, sind nur solche Matrix-Elemente von Null verschieden, die Zustände enthalten, die sich in der Zahl der angeregten Quasiteilchen um Eins unterscheiden.

Wir kennzeichnen die Unterschiede in der Quasiteilchen-Besetzung entweder durch Indizes $n\sigma'$, wenn z.B. der Zustand $|\phi_{n\sigma',\ell\sigma}\rangle$ zusätzlich zu den Anregungen des Zustands $|\phi\rangle$ noch angeregte Quasiteilchen in $(n\sigma')$ und $(\ell\sigma)$ hat, oder durch Indizes $-(n\sigma')$, wenn $|\phi_{-(n\sigma'),\ell\sigma}\rangle$ dieselben Zustände besetzt hält wie $|\phi'\rangle$ mit der Ausnahme, daß der in $|\phi'\rangle$ besetzte Zustand $(n\sigma')$ leer ist und der in $|\phi'\rangle$ leere Zustand $(\ell\sigma)$ besetzt ist.

Um das Pauli-Prinzip bei der Entwicklung von M_1^ϕ berücksichtigen zu können, definieren wir die Funktion

$$Z(\phi, n\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{wenn der Quasiteilchen-Zustand } (n\sigma) \text{ in } |\phi\rangle \text{ besetzt ist.} \\ 0 & \text{unbesetzt} \end{cases} \quad (1.9)$$

Es ist nicht schwer, einzusehen, daß alle von Null verschiedenen Matrix-Elemente der Gl. (8) in

$$\begin{aligned} M_1^\phi &= \sum_n [1 - Z(\phi, n\sigma)] \langle \phi | \psi_{-\sigma}^+ | \phi_{n\sigma} \rangle \langle \phi_{n\sigma} | \psi_{-\sigma} | \phi \rangle \langle \phi | \psi_{\sigma} | \phi_{\ell\sigma} \rangle \\ &+ \sum_n Z(\phi, n\sigma) \langle \phi | \psi_{-\sigma}^+ | \phi_{-(n\sigma)} \rangle \langle \phi_{-(n\sigma)} | \psi_{-\sigma} | \phi \rangle \langle \phi | \psi_{\sigma} | \phi_{\ell\sigma} \rangle \\ &+ \sum_n [1 - Z(\phi, n\sigma)] \langle \phi | \psi_{-\sigma}^+ | \phi_{\ell\sigma} \rangle \langle \phi_{\ell\sigma} | \psi_{-\sigma} | \phi_{n\sigma, \ell\sigma} \rangle \langle \phi_{\ell\sigma, n\sigma} | \psi_{\sigma} | \phi_{\ell\sigma} \rangle \\ &+ \sum_n Z(\phi, n\sigma) \langle \phi | \psi_{-\sigma}^+ | \phi_{\ell\sigma} \rangle \langle \phi_{\ell\sigma} | \psi_{-\sigma} | \phi_{-(n\sigma), \ell\sigma} \rangle \langle \phi_{\ell\sigma, -(n\sigma)} | \psi_{\sigma} | \phi_{\ell\sigma} \rangle \end{aligned} \quad (1.10)$$

enthalten sind. In der ersten und dritten Summe werden die Quasiteilchen-Anregungen ($n \pm \frac{1}{2}$) durch Vernichtung eines gepaarten Elektrons erzeugt, und sie werden vernichtet, indem man das Loch wieder auffüllt oder das ungepaarte Elektron beseitigt. In der zweiten und vierten Summe werden die Anregungen ($n \pm \frac{1}{2}$) vernichtet und neu geschaffen, indem ein ungepaartes Elektron vernichtet und "von außen" wieder hinzugefügt oder durch Aufbrechen eines Grund-Paares erzeugt wird.

Die Matrix-Elemente von M_1^ϕ kann man durch die Wellenfunktionen von Elektronen und Löchern aus Gl. (1.7) ausdrücken. Aber wegen der Spezifizierung auf die Konfiguration $|T_{\frac{1}{2}}\rangle$ müssen wir den Einfluß des Quasiteilchens im Zustand ($\frac{1}{2}$) auf die Wellenfunktionen der anderen Quasiteilchen berücksichtigen. (In den Gln. (1.7) wurde der Einfluß eines Quasiteilchens auf sich selbst in die Definition seiner Wellenfunktionen mit hineingenommen.) Wir nehmen an, daß dieser Einfluß die Wellenfunktionen um eine reelle Phasenverschiebung $S_\ell(x)$ gegenüber den der Definition (1.7) entsprechenden Werten abändert. Diese Annahme ist gerechtfertigt, wenn $S_\ell(x)$ klein ist. Wie wir sehen werden, ist das immer der Fall.

Wir schreiben also

$$\left. \begin{aligned} \langle \phi_{\frac{1}{2}} | \Psi_{\frac{1}{2}}(x) | \phi_{n-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \rangle \\ \langle \phi | \Psi_{\frac{1}{2}}(x) | \phi_{n-\frac{1}{2}} \rangle \end{aligned} \right\} = e^{iS_\ell(x)} \left. \begin{aligned} \langle \phi_{\frac{1}{2}, -(n\frac{1}{2})} | \Psi_{\frac{1}{2}}(x) | \phi_{\frac{1}{2}} \rangle \\ \langle \phi_{-(n\frac{1}{2})} | \Psi_{\frac{1}{2}}(x) | \phi \rangle \end{aligned} \right\} = e^{iS_\ell(x)} \quad (1.11a)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle \phi_{\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} | \Psi_{\frac{1}{2}}(x) | \phi_{\frac{1}{2}} \rangle \\ \langle \phi_{n-\frac{1}{2}} | \Psi_{\frac{1}{2}}(x) | \phi \rangle \end{aligned} \right\} = e^{iS_\ell(x)} \left. \begin{aligned} \langle \phi_{\frac{1}{2}} | \Psi_{\frac{1}{2}} | \phi_{-(n\frac{1}{2}), \frac{1}{2}} \rangle \\ \langle \phi | \Psi_{\frac{1}{2}} | \phi_{-(n\frac{1}{2})} \rangle \end{aligned} \right\} = e^{iS_\ell(x)} \quad (1.11b)$$

Mit den Gln. (1.7), (1.10) und (1.11) erhalten wir

$$M_1^\phi = \sum_n [1 - Z(\phi, n\sigma)] \psi_{m\sigma} \psi_{m\sigma}^* f_{\ell\sigma} + \sum_n Z(\phi, n\sigma) f_{m-\sigma}^* f_{m-\sigma} f_{\ell\sigma} \\ + \sum_n [1 - Z(\phi, n\sigma)] \psi_{\ell\sigma} f_{m\sigma} \psi_{n\sigma}^* e^{i2\zeta_\ell} + \sum_n Z(\phi, n\sigma) \psi_{\ell\sigma} \psi_{m\sigma}^* f_{m\sigma} e^{i2\zeta_\ell} . \quad (1.12)$$

Die Gln. (1.6), (1.8) und (1.12) ergeben zusammen

$$\langle T | \Psi_{-\sigma}^+(x) \Psi_{-\sigma}^+(x) \Psi_{\sigma}^+(x) | T_{\ell\sigma} \rangle = \sum_\phi P_\phi(\tau) M_1^\phi = \\ = f_{\ell\sigma}(x) \left\{ \sum_n |\Psi_{n-\sigma}(x)|^2 \sum_\phi P_\phi(\tau) [1 - Z(\phi, n\sigma)] + \sum_n |f_{m-\sigma}(x)|^2 \sum_\phi P_\phi(\tau) Z(\phi, n\sigma) \right\} \\ + \psi_{\ell\sigma}(x) e^{i2\zeta_\ell} \left\{ \sum_n \psi_{n-\sigma}^*(x) f_{m-\sigma}(x) \sum_\phi P_\phi(\tau) [1 - Z(\phi, n\sigma)] + \sum_n \psi_{m\sigma}^*(x) f_{m\sigma}(x) \sum_\phi P_\phi(\tau) Z(\phi, n\sigma) \right\} . \quad (1.13)$$

Das Matrix-Element der drei Operatoren in der Gl. (1.4b),

$$\langle T | \sum_\alpha \Psi_{-\sigma}^+(x) \Psi_{\alpha}^+(x) \Psi_{\alpha}(x) | T_{\ell\sigma} \rangle = \langle T | \Psi_{-\sigma}^+(x) \Psi_{\sigma}^+(x) \Psi_{\sigma}(x) | T_{\ell\sigma} \rangle , \quad (1.14)$$

kann auf dieselbe Weise ausgewertet werden wie das von Gl. (1.13). Mit

$$M_2^\phi \equiv \langle \phi | \Psi_{-\sigma}^+(x) \Psi_{\sigma}^+(x) \Psi_{\sigma}(x) | \phi_{\ell\sigma} \rangle = \\ = \sum_n [1 - Z(\phi, n\sigma)] \langle \phi | \Psi_{-\sigma}^+ | \phi_{m\sigma} \rangle \langle \phi_{m\sigma} | \Psi_{\sigma}^+ | \phi \rangle \langle \phi | \Psi_{\sigma} | \phi_{\ell\sigma} \rangle \\ + \sum_n Z(\phi, n\sigma) \langle \phi | \Psi_{-\sigma}^+ | \phi_{-(m-\sigma)} \rangle \langle \phi_{-(m-\sigma)} | \Psi_{\sigma}^+ | \phi \rangle \langle \phi | \Psi_{\sigma} | \phi_{\ell\sigma} \rangle \\ + \sum_n [1 - Z(\phi, n\sigma)] \langle \phi | \Psi_{-\sigma}^+ | \phi_{\ell\sigma} \rangle \langle \phi_{\ell\sigma} | \Psi_{\sigma}^+ | \phi_{m-\sigma, \ell\sigma} \rangle \langle \phi_{m-\sigma, \ell\sigma} | \Psi_{\sigma} | \phi_{\ell\sigma} \rangle \\ + \sum_n Z(\phi, n\sigma) \langle \phi | \Psi_{-\sigma}^+ | \phi_{\ell\sigma} \rangle \langle \phi_{\ell\sigma} | \Psi_{\sigma}^+ | \phi_{-(m\sigma), \ell\sigma} \rangle \langle \phi_{-(m\sigma), \ell\sigma} | \Psi_{\sigma} | \phi_{\ell\sigma} \rangle ,$$

$$M_2^\phi = \left\{ \sum_n [1 - Z(\phi, n\sigma)] \psi_{n\sigma} f_{n\sigma}^* f_{e\sigma} + \sum_n Z(\phi, n\sigma) f_{n-\sigma}^* \psi_{n-\sigma} f_{e\sigma} \right\} e^{-i2S_2(x)} \\ + \sum_n [1 - Z(\phi, n\sigma)] \psi_{e\sigma} \psi_{n-\sigma} \psi_{n\sigma}^* + \sum_n Z(\phi, n\sigma) \psi_{e\sigma} f_{n\sigma}^* f_{n\sigma} , \quad (1.15)$$

und mit Gl. (1.6) wird Gl. (1.14) zu

$$\langle T | \Psi_{-\sigma}^+ \Psi_{\sigma}^+ \Psi_{-\sigma}(x) | T_{e\sigma} \rangle = \sum_{\phi} P_{\phi}(\tau) M_2^\phi = \\ = f_{e\sigma}(x) e^{-i2S_2(x)} \left\{ \sum_n \psi_{n\sigma}(x) f_{n\sigma}^* \sum_{\phi} P_{\phi}(\tau) [1 - Z(\phi, n\sigma)] + \sum_n \psi_{n-\sigma}(x) f_{n-\sigma}^* \sum_{\phi} P_{\phi}(\tau) Z(\phi, n-\sigma) \right\} \\ + \psi_{e\sigma}(x) \left\{ \sum_n |\psi_{n-\sigma}(x)|^2 \sum_{\phi} P_{\phi}(\tau) [1 - Z(\phi, n-\sigma)] + \sum_n |f_{n-\sigma}(x)|^2 \sum_{\phi} P_{\phi}(\tau) Z(\phi, n-\sigma) \right\} . \quad (1.16)$$

Wenn wir in den Definitionen der Wellenfunktionen (1.7) σ durch $-\sigma$ ersetzen, erhalten wir

$$f_{n-\sigma}(x) = \langle \phi | \Psi_{-\sigma}(x) | \phi_{n-\sigma} \rangle , \quad \psi_{n-\sigma}(x) = \langle \phi | \Psi_{\sigma}^+(x) | \phi_{n-\sigma} \rangle .$$

Weil alle Wechselwirkungen, die auf die Spins wirken, vernachlässigbar klein sein sollen, ist die Bewegung eines Quasiteilchens unabhängig vom Spin. Darum ist

$$f_{n-\sigma}(x) = f_{n\sigma}(x) \equiv f_n(x) . \quad (1.17)$$

In der lochartigen Wellenfunktion hat der Zustand $\Psi_{\sigma}^+ | \phi_{n-\sigma} \rangle$ zwei Fermionen mit den Spins σ und $-\sigma$ in der umgekehrten Reihenfolge wie der Zustand $\Psi_{-\sigma}^+ | \phi_{n\sigma} \rangle$. Daher ist wegen der Antivertauschungseigenschaften der Fermionen

$$-\Psi_{n-\sigma}(x) = \Psi_{n\sigma}(x) \equiv \Psi_n(x) . \quad (1.18)$$

Wir definieren

$$w_{n\pm\sigma}(\tau) \equiv \sum_{\phi} P_{\phi}(\tau) Z(\phi, n\pm\sigma) , \quad (1.19)$$

$$U_{\pm\sigma}(x) \equiv -V \sum_n \left\{ |f_n(x)|^2 w_{n\mp\sigma} + |\psi_n(x)|^2 (1 - w_{n\pm\sigma}) \right\} , \quad (1.20)$$

$$\Delta(x) \equiv V \sum_n \psi_n^*(x) f_n(x) [1 - w_{n-\sigma} - w_{n+\sigma}] \quad (1.21)$$

und erhalten mit den Gln. (1.4) - (1.7), (1.13) und (1.16) - (1.21) die Wellengleichungen der Quasiteilchen in einem Supraleiter als

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f_e(x) = \left\{ \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + U_0(x) - \mu + U_{+\sigma}(x) \right\} f_e(x) + e^{i2S_e(x)} \Delta(x) \psi_e(x) \quad , \quad (1.22a)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_e(x) = - \left\{ \frac{1}{2m} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + U_0(x) - \mu + U_{-\sigma}(x) \right\} \psi_e(x) + e^{-i2S_e(x)} \Delta^*(x) f_e(x) \quad . \quad (1.22b)$$

Die in Gl. (1.19) definierte Größe $w_{n\pm\sigma}^{(T)}$ kann als die Wahrscheinlichkeit verstanden werden, daß bei der Temperatur T der angeregte Quasiteilchen-Zustand $(n\pm\sigma)$ besetzt ist. Wir werden im übernächsten Abschnitt $w_{n\pm\sigma}^{(T)}$ durch Minimalisierung der freien Energie bestimmen. Im Falle von Spin-Isotropie ist $w_{n\pm\sigma}^{(T)} = w_n^{(T)}$ und $U_{\pm\sigma}(x) = U(x)$.

Dabei stellt $U(x)$ das Hartree-Fock Potential des Systems für Punktwechselwirkung dar. $\Delta(x)$ nennen wir das Paarpotential; es ist ein Maß für die Paarungswahrscheinlichkeit in dem Fermionen-System. Beide Potentiale werden in selbstkonsistenter Weise durch den vollständigen Satz von Lösungen der Quasiteilchen-Gleichungen (1.22) bestimmt.

Obwohl per definitionem $w_{e\sigma} = 0$ ist (wir nahmen an, daß in allen Zuständen $|\phi\rangle$ kein durch $(l\sigma)$ gekennzeichnetes Quasiteilchen vorhanden ist, so daß $z(\phi, l\sigma) = 0$ ist für alle $|\phi\rangle$), können wir in den Potentialen (1.20) und (1.21) die Besetzungswahrscheinlichkeiten für Isotropie, w_n , benutzen, weil sich die Terme, die $w_{e\sigma}$ enthalten, in

$$U_{+\sigma}(x) f_e + \Delta(x) \psi_e \quad \text{und} \quad -U_{-\sigma}(x) \psi_e + \Delta^*(x) f_e$$

herausheben.

Wenn $S_\ell(x) = 0$ ist, stellen die Gln. (1.19) - (1.22) die zeitabhängige Version der "Bogoliubov Gleichungen" dar, wie sie im 5. Kapitel von de Gennes' Buch angegeben werden¹²⁾. Die neu eingeführte Phase $S_\ell(x)$ läßt die Möglichkeit zu, daß ein Quasiteilchen im Quantenzustand $(\ell\sigma)$ die Phase aller anderen Teilchen der Konfiguration $|\tau_{\ell\sigma}\rangle$ beeinflusst. Wir werden sehen, daß $S_\ell(x)$ in solchen Gebieten von Null verschieden ist, in denen das Quasiteilchen $(\ell\sigma)$ zerfällt und einen Suprastrom induziert, dessen Impuls proportional zu $\vec{\nabla} S_\ell(x)$ ist. Es wird auch gezeigt werden, daß $S_\ell(x)$ kleiner als $N^{-2/3}$ ist, wobei N die Zahl der Elektronen im supraleitenden Gebiet ist. Darum können wir beim Lösen der Quasiteilchen-Gleichungen $S_\ell(x)$ immer vernachlässigen. Wir werden die Phase aber brauchen, um in jedem angeregten Zustand des Systems die Ladungserhaltung sicherzustellen. Das wird im nächsten Abschnitt gezeigt werden.

2. Die Phasenverschiebung $S_\ell(x)$

Ein Vielteilchenoperator $\sum_n \hat{O}_n$, von dem angenommen wird, daß er aus Einteilchenoperatoren $\hat{O}_p$ besteht, die nur auf Raum-Zeit Koordinaten wirken, hat im Formalismus der zweiten Quantisierung für die Konfiguration $|\tau_{\ell\sigma}\rangle$ den mittleren Erwartungswert

$$\begin{aligned} \langle \sum_n \hat{O}_n \rangle_{av.} &= \langle \tau_{\ell\sigma} | \sum_x \Psi_x^\dagger(x) \hat{O}_p \Psi_x(x) | \tau_{\ell\sigma} \rangle = \\ &= \sum_\phi P_\phi(\tau) \left\{ \langle \phi_{\ell\sigma} | \Psi_\sigma^\dagger(x) \hat{O}_p \Psi_\sigma(x) | \phi_{\ell\sigma} \rangle + \langle \phi_{\ell\sigma} | \Psi_{-\sigma}^\dagger(x) \hat{O}_p \Psi_{-\sigma}(x) | \phi_{\ell\sigma} \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Wir haben die Gl. (1.6) benutzt und werten die Matrix-Elemente so aus wie in Abschnitt 1:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\ell\sigma} | \Psi_\sigma^\dagger(x) \hat{O}_p \Psi_\sigma(x) | \phi_{\ell\sigma} \rangle &= \langle \phi_{\ell\sigma} | \Psi_\sigma^\dagger | \phi \rangle \hat{O}_p \langle \phi | \Psi_\sigma | \phi_{\ell\sigma} \rangle + \\ &+ \sum_n [1 - Z(\phi, n\sigma)] \langle \phi_{\ell\sigma} | \Psi_\sigma^\dagger | \phi_{n\sigma, \ell\sigma} \rangle \hat{O}_p \langle \phi_{\ell\sigma, n\sigma} | \Psi_\sigma | \phi_{\ell\sigma} \rangle + \\ &+ \sum_n Z(\phi, n\sigma) \langle \phi_{\ell\sigma} | \Psi_\sigma^\dagger | \phi_{-(n\sigma), \ell\sigma} \rangle \hat{O}_p \langle \phi_{\ell\sigma, -(n\sigma)} | \Psi_\sigma | \phi_{\ell\sigma} \rangle \\ &= \int_{\ell\sigma}^* \hat{O}_p \int_{\ell\sigma} + \sum_n [1 - Z(\phi, n\sigma)] \psi_{n\sigma}^* e^{-iS_\ell} \hat{O}_p e^{iS_\ell} \psi_{n\sigma}^* + \sum_n Z(\phi, n\sigma) \int_{n\sigma}^* e^{-iS_\ell} \hat{O}_p e^{iS_\ell} \int_{n\sigma}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_{l\sigma} | \Psi_{-\sigma}^+ \text{Op} \Psi_{-\sigma} | \phi_{l\sigma} \rangle &= \\
 &= \sum_{n \neq l} [1 - Z(\phi_{n\sigma})] \langle \phi_{l\sigma} | \Psi_{-\sigma}^+ | \phi_{n\sigma, l\sigma} \rangle \text{Op} \langle \phi_{l\sigma, n\sigma} | \Psi_{-\sigma} | \phi_{l\sigma} \rangle + \\
 &+ \sum_n Z(\phi_{n\sigma}) \langle \phi_{l\sigma} | \Psi_{-\sigma}^+ | \phi_{-(n\sigma), l\sigma} \rangle \text{Op} \langle \phi_{l\sigma, -(n\sigma)} | \Psi_{-\sigma} | \phi_{l\sigma} \rangle = \quad (2.3) \\
 &= \sum_{n \neq l} [1 - Z(\phi_{n\sigma})] \varphi_{n\sigma} e^{-iS_e} \text{Op} e^{iS_e} \varphi_{n\sigma}^* + \sum_n Z(\phi_{n\sigma}) \varphi_{n\sigma}^* e^{-iS_e} \text{Op} e^{iS_e} \varphi_{n\sigma}.
 \end{aligned}$$

Wir setzen die Ausdrücke (2.2) und (2.3) in Gl. (2.1) ein und erhalten mit den Gln. (1.17) - (1.19)

$$\begin{aligned}
 \langle T_{e\sigma} | \sum_x \Psi_x^+ \text{Op} \Psi_x | T_{e\sigma} \rangle &= \varphi_e^* \text{Op} \varphi_e - \varphi_e e^{-iS_e} \text{Op} e^{iS_e} \varphi_e^* + \\
 &+ \sum_n \left\{ \varphi_n^* e^{-iS_e} \text{Op} e^{iS_e} \varphi_n (\omega_{n\sigma} + \omega_{n-\sigma}) + \varphi_n e^{-iS_e} \text{Op} e^{iS_e} \varphi_n^* (2 - \omega_{n\sigma} - \omega_{n-\sigma}) \right\}. \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Dabei wird berücksichtigt, daß $\omega_{e\sigma} = 0 = Z(\phi_{e\sigma})$. Wenn Op gleich der Elektronenladungsdichte ist, finden wir als Ladungsdichte des Systems

$$\rho_e = e \left\{ |\varphi_e|^2 - |\varphi_e|^2 + \sum_n [|\varphi_n|^2 (\omega_{n\sigma} + \omega_{n-\sigma}) + |\varphi_n|^2 (2 - \omega_{n\sigma} - \omega_{n-\sigma})] \right\}. \quad (2.5)$$

Wenn $\text{Op} = \frac{e}{m} \left(\frac{\vec{\nabla}}{i} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)$ ist, stellt der Realteil von Gl. (2.4) die Dichte des elektrischen Stroms dar, die in der Konfiguration $|T_{e\sigma}\rangle$ fließt:

$$\begin{aligned}
 \vec{j}_e &= \frac{e}{m} \text{Re} \left\{ \varphi_e^* \left(\frac{\vec{\nabla}}{i} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \varphi_e - \varphi_e \left(\frac{\vec{\nabla}}{i} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \varphi_e^* + \right. \\
 &+ \sum_n \left[\varphi_n^* \left(\frac{\vec{\nabla}}{i} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \varphi_n (\omega_{n\sigma} + \omega_{n-\sigma}) + \varphi_n \left(\frac{\vec{\nabla}}{i} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \varphi_n^* (2 - \omega_{n\sigma} - \omega_{n-\sigma}) \right] \Big\} + \quad (2.6) \\
 &+ \frac{e}{m} \vec{\nabla} S_e \left\{ \sum_n [|\varphi_n|^2 (\omega_{n\sigma} + \omega_{n-\sigma}) + |\varphi_n|^2 (2 - \omega_{n\sigma} - \omega_{n-\sigma})] - |\varphi_e|^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Wir nehmen Spin-Isotropie an, so daß

$$U_{\pm\frac{1}{2}}(x) = U(x) \quad (2.7)$$

ist und definieren

$$\bar{\mu}(x) \equiv \mu - U(x) - U_0(x). \quad (2.8)$$

Die zeitliche Änderung der Ladungsdichte, $(\partial/\partial t) \rho_e$, wird mit Hilfe der in Gln. (1.22) angegebenen Zeitableitungen der Wellenfunktionen berechnet:

$$\dot{f}_n(x) = -i \left\{ \frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 - \bar{\mu} \right\} f_n(x) - i e^{i2S_n(x)} \Delta(x) \varphi_n(x), \quad (2.9a)$$

$$\dot{\varphi}_n(x) = i \left\{ \frac{1}{2m} (\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A})^2 - \bar{\mu} \right\} \varphi_n(x) - i e^{-i2S_n(x)} \Delta(x) f_n(x). \quad (2.9b)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} |f_e|^2 - \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_e|^2 \right] = \\ & = -\frac{1}{m} \operatorname{Re} \operatorname{div} \left[f_e^* (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) f_e - \varphi_e (\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}) \varphi_e^* \right] - 4 \operatorname{Im} \left[e^{-i2S_e} \Delta(x) \varphi_e^* f_e \right], \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} & \sum_n \frac{\partial}{\partial t} |f_n|^2 (\omega_{n\sigma} + \omega_{n-\sigma}) = \\ & = -i \sum_n \left\{ \frac{1}{2m} \left[f_n^* (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) f_n - f_n (\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}) f_n^* \right] - i2 \operatorname{Im} \left[e^{-i2S_n} \Delta^* \varphi_n^* f_n \right] \right\} (\omega_{n\sigma} + \omega_{n-\sigma}) \quad (2.11) \\ & \approx \frac{1}{m} \operatorname{Re} \operatorname{div} \sum_n f_n^* (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) f_n (\omega_{n\sigma} + \omega_{n-\sigma}) - 2 \operatorname{Im} \left[\Delta^* \sum_n \varphi_n^* f_n \right] (\omega_{n\sigma} + \omega_{n-\sigma}); \end{aligned}$$

dabei haben wir wegen der Kleinheit von S_n die Näherung $e^{-i2S_n} \approx 1 - i2S_n$ gemacht und angenommen, daß sich die S_n bei der Summation über n gegenseitig herausheben. Dies wird durch unsere späteren Ergebnisse gerechtfertigt werden. Ebenso ist

$$\begin{aligned} & \sum_n \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_n|^2 (2 - \omega_{n\sigma} - \omega_{n-\sigma}) = \\ & = i \sum_n \left\{ \frac{1}{2m} \left[\varphi_n (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) \varphi_n^* - \varphi_n^* (\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}) \varphi_n \right] - i2 \operatorname{Im} \left[e^{-i2S_n} \Delta^* \varphi_n^* f_n \right] \right\} (2 - \omega_{n\sigma} - \omega_{n-\sigma}) \approx \end{aligned} \quad (2.12)$$



$$\approx -\frac{1}{m} \text{Re div} \sum_n \left[\psi_n \left(\vec{\nabla}_i - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \psi_n^* (2 - w_{n\sigma} - w_{n-\sigma}) + 2 \text{Im} [\Delta^*(x) \sum_n \psi_n^* f_n (2 - w_{n\sigma} - w_{n-\sigma})] \right].$$

Wir addieren die Gln. (2.10) - (2.12), multiplizieren mit e und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} S_e = & -\frac{e}{m} \text{Re div} \left\{ f_e^* \left(\vec{\nabla}_i - \frac{e}{c} \vec{A} \right) f_e - \psi_e \left(\vec{\nabla}_i - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \psi_e^* + \right. \\ & \left. + \sum_n \left[f_n^* \left(\vec{\nabla}_i - \frac{e}{c} \vec{A} \right) f_n (w_{n\sigma} + w_{n-\sigma}) + \psi_n \left(\vec{\nabla}_i - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \psi_n^* (2 - w_{n\sigma} - w_{n-\sigma}) \right] \right\} - \\ & - e 4 \text{Im} [e^{-2S_e} \Delta^*(x) \psi_e^* f_e (1 - w_e)] . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Weil wir die symmetrischen Quasiteilchen-Gleichungen (2.9) mit dem spin-unabhängigen Hartree-Fock Potential aus Gl. (2.7) benutzt haben, müssen wir die selbstkonsistenten Potentiale $U(x)$ und $\Delta(x)$ mit den Besetzungswahrscheinlichkeiten $w_{n\sigma} = w_n$ des Gleichgewichtszustandes definieren. Da aber in Gl. (2.12) per definitionem $w_{e\sigma} = 0$ ist, müssen wir schreiben

$$\begin{aligned} 4 \text{Im} [\Delta^*(x) \sum_n \psi_n^* f_n (1 - w_{n\sigma} - w_{n-\sigma})] = \\ = 4 \text{Im} [\Delta^*(x) \Delta(x)] + 4 \text{Im} [\Delta^* \psi_e^* f_e w_e] = 4 \text{Im} [\Delta^* \psi_e^* f_e w_e] \end{aligned} \quad (2.14)$$

und erhalten so den letzten Term in Gl. (2.13).

Die Divergenz der Stromdichte nach Gl. (2.6) ist

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{j}_e = & \frac{e}{m} \text{Re div} \left\{ f_e^* \left(\vec{\nabla}_i - \frac{e}{c} \vec{A} \right) f_e - \psi_e \left(\vec{\nabla}_i - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \psi_e^* \right\} + \\ & + \frac{e}{m} \text{Re div} \sum_n \left[f_n^* \left(\vec{\nabla}_i - \frac{e}{c} \vec{A} \right) f_n (w_{n\sigma} + w_{n-\sigma}) + \psi_n \left(\vec{\nabla}_i - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \psi_n^* (2 - w_{n\sigma} - w_{n-\sigma}) \right] \\ & + \frac{e}{m} \text{Re div} \vec{\nabla} S_e(x) \left\{ \sum_n \left[|f_n|^2 (w_{n\sigma} + w_{n-\sigma}) + |\psi_n|^2 (2 - w_{n\sigma} - w_{n-\sigma}) \right] - |\psi_e|^2 \right\} . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Zusammen ergeben die Gln. (2.13) und (2.15)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} S_e + \operatorname{div} \vec{j}_e = & -e 4 \mathcal{F}_m \left[e^{-i 2 S_e} \Delta(x) \Psi_e^* f_e (1 - w_e) \right] + \\ & + \frac{e}{m} \operatorname{Re} \operatorname{div} \vec{\nabla} S_e \left\{ \sum_n \left[|f_n|^2 (w_{n\sigma} + w_{n-\sigma}) + |\Psi_n|^2 (2 - w_{n\sigma} - w_{n-\sigma}) \right] - |\Psi_e|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ladungserhaltung in der Konfiguration $|T_{\ell\sigma}\rangle$ ist nur dann gewährleistet, wenn in Gl. (2.16)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{\nabla} S_e \left\{ \sum_n \left[|f_n|^2 (w_{n\sigma} + w_{n-\sigma}) + |\Psi_n|^2 (2 - w_{n\sigma} - w_{n-\sigma}) \right] - |\Psi_e|^2 \right\} = \\ = 4 \mathcal{F}_m \mathcal{F}_m \left[e^{-i 2 S_e} \Delta(x) \Psi_e^* f_e (1 - w_e) \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

ist und somit

$$\frac{\partial}{\partial t} S_e + \operatorname{div} \vec{j}_e = 0.$$

Die Gl. (2.17) bestimmt die Phasenverschiebung, die ein Quasiteilchen im Quantenzustand $(\ell\sigma)$ bei allen anderen Teilchen der Konfiguration $|T_{\ell\sigma}\rangle$ hervorruft. Die geschweifte Klammer, die $\vec{\nabla} S_e$ multipliziert, gibt die Gesamtzahl N der Elektronen im Supraleiter an, wobei das Elektron in $(\ell\sigma)$ nicht in N enthalten ist (dies wird durch $w_{\ell\sigma} = 0$ und die subtrahierte Funktion $|\Psi_e|^2$ gewährleistet). Daher können wir schon schließen, daß $\vec{\nabla} S_e(x)$ und $S_e(x)$ von der Größenordnung $1/N$ sein werden. Aus der Gl. (2.6) ersehen wir aber, daß $\vec{\nabla} S_e(x)$ trotz seiner Kleinheit einen nicht vernachlässigbaren Beitrag zur Stromdichte liefert.

Ehe wir zeigen, daß $\vec{\nabla} S_e(x)$ ungleich Null ist, wenn das Quasiteilchen $(\ell\sigma)$ exponentiell im Supraleiter zerfällt, - so daß man die zu $\vec{\nabla} S_e(x)$ proportionale Stromdichte als vom zerfallenden Quasiteilchen induziert ansehen kann, - wollen wir die in Gl. (1.19) definierte Quasiteilchen-Verteilungsfunktion $w_{n\sigma}$ berechnen.

3. Die Verteilungsfunktion der Quasiteilchen

Wir nehmen an, daß sich das System bei der Temperatur T im Gleichgewicht befindet. Es liegt also die Konfiguration $|T\rangle$ vor. Mit dem Kontaktpotential der Gl. (1.5) ist der Energieoperator der Gl. (1.2)

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\alpha} \int d^3r \Psi_{\alpha}^{\dagger}(x) \left\{ \frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 + U_0(x) - \mu \right\} \Psi_{\alpha}(x) \\ &\quad - \frac{V}{2} \sum_{\alpha, \beta} \int d^3r \Psi_{\alpha}^{\dagger}(x) \Psi_{\alpha}^{\dagger}(x) \Psi_{\beta}(x) \Psi_{\beta}(x) \\ &\equiv H_0 + H_{int}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Der mittlere Erwartungswert der Energie ist

$$\langle T | H | T \rangle = \langle T | H_0 | T \rangle + \langle T | H_{int} | T \rangle, \quad (3.2)$$

$$\langle T | H_0 | T \rangle = \sum_{\phi} P_{\phi}(T) \langle \phi | H_0 | \phi \rangle, \quad (3.3)$$

$$\langle T | H_{int} | T \rangle = \sum_{\phi} P_{\phi}(T) \langle \phi | H_{int} | \phi \rangle, \quad (3.4)$$

wobei wie gehabt $P_{\phi}(T)$ die Wahrscheinlichkeit ist, daß bei der Temperatur T das Vielteilchensystem sich im Zustand $|\phi\rangle$ befindet; die Summe geht über alle $|\phi\rangle$. Auf die Weise, in der wir die Gl. (2.4) aus Gl. (2.1) herleiteten, erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle T | H_0 | T \rangle &= \int d^3r \sum_{n, \alpha} \left\{ f_{\alpha}^{*}(x) \left[\frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 + U_0(x) - \mu \right] f_{\alpha}(x) \omega_{n\alpha} \right. \\ &\quad \left. + f_{\alpha}(x) \left[\frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 + U_0(x) - \mu \right] f_{\alpha}^{*}(x) (1 - \omega_{n\alpha}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die mittlere Wechselwirkungsenergie $\langle T | H_{int} | T \rangle$ kann am leichtesten mit Hilfe des Wick'schen Theorems¹⁶⁾ berechnet werden; demgemäß ist



$$\begin{aligned}
 \sum_{\alpha\beta} \langle T | \Psi_{\alpha}^{+} \Psi_{\beta}^{+} \Psi_{\beta} \Psi_{\alpha} | T \rangle &= \sum_{\alpha\beta} \langle T | \Psi_{\alpha}^{+} \Psi_{\alpha} | T \rangle \langle T | \Psi_{\beta}^{+} \Psi_{\beta} | T \rangle - \\
 &- \sum_{\alpha\beta} \langle T | \Psi_{\alpha}^{+} \Psi_{\beta} | T \rangle \langle T | \Psi_{\beta}^{+} \Psi_{\alpha} | T \rangle + \\
 &+ \sum_{\alpha\beta} \langle T | \Psi_{\alpha}^{+} \Psi_{\beta}^{+} | T \rangle \langle T | \Psi_{\beta} \Psi_{\alpha} | T \rangle = \\
 &= \sum_{\alpha} \left\{ \langle T | \Psi_{\alpha}^{+} \Psi_{\alpha} | T \rangle \langle T | \Psi_{\alpha}^{+} \Psi_{\alpha} | T \rangle + \langle T | \Psi_{\alpha}^{+} \Psi_{\alpha}^{+} | T \rangle \langle T | \Psi_{\alpha} \Psi_{\alpha} | T \rangle \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Wieder erhalten wir wie bei der Herleitung der Gl. (2.4)

$$\langle T | \Psi_{\alpha}^{+} \Psi_{\alpha} | T \rangle = \sum_n \left\{ |f_n|^2 \omega_{n\alpha} + |\varphi_n|^2 (1 - \omega_{n\alpha}) \right\} = -\frac{1}{V} U_{\alpha}(x), \tag{3.7}$$

vgl. Gl. (1.20), und auf ähnliche Weise finden wir

$$\langle T | \Psi_{\alpha}(x) \Psi_{\alpha}(x) | T \rangle = \sum_n \left\{ \varphi_n^{*} f_n (1 - \omega_{n\alpha} - \omega_{n\alpha}) \right\} = \frac{1}{V} \Delta(x). \tag{3.8}$$

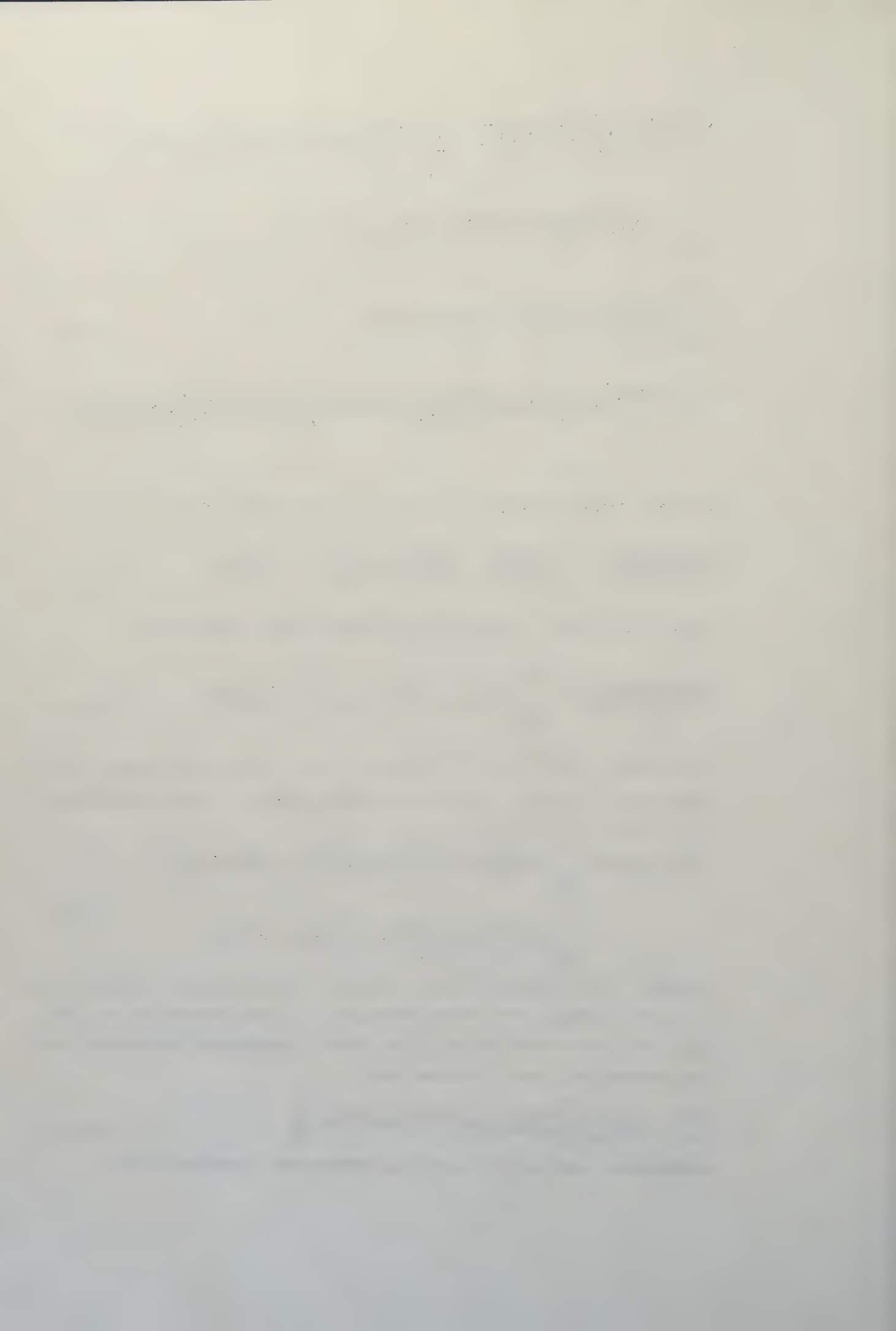
Wir setzen die Gln. (3.7) und (3.8) in Gl. (3.6) ein, nehmen Spin-Isotropie an, so daß $\omega_{n\alpha} = \omega_n$ ist, summieren über α und erhalten

$$\begin{aligned}
 \langle T | H_{int} | T \rangle &= -V \sum_{\ell, n} \int d^3r \left[|f_{\ell}|^2 \omega_{\ell} + |\varphi_{\ell}|^2 (1 - \omega_{\ell}) \right] \left[|f_n|^2 \omega_n + |\varphi_n|^2 (1 - \omega_n) \right] \\
 &- V \sum_{\ell, n} \int d^3r \varphi_{\ell}(x) f_{\ell}^{*}(x) (1 - 2\omega_{\ell}) \cdot \varphi_n^{*}(x) f_n(x) (1 - 2\omega_n)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Nachdem die Wechselwirkung einmal berücksichtigt worden ist, die zur Bildung des Paarpotentials führt, können wir die Quasiteilchen-Anregungen als freie Fermionen behandeln und die Entropie S des Systems aus

$$S = -2k_B \sum_n \left[\omega_n \ln \omega_n + (1 - \omega_n) \ln (1 - \omega_n) \right] \tag{3.10}$$

berechnen, wobei k_B die Boltzmannsche Konstante ist.



Die freie Energie des Systems

$$F = \langle T | H | T \rangle - TS$$

wird mit den Gln. (3.2), (3.5), (3.9) und (3.10) zu

$$\begin{aligned} F = & 2 \sum_n \int d^3r \left\{ f_n^*(x) \left[\frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 + U_0(x) - \mu \right] f_n(x) \cdot \omega_n \right. \\ & \left. + \varphi_n^*(x) \left[\frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 + U_0(x) - \mu \right] \varphi_n^*(x) \cdot (1 - \omega_n) \right\} \\ & - V \sum_{l,n} \int d^3r \left[|f_l(x)|^2 \omega_l + |\varphi_l(x)|^2 (1 - \omega_l) \right] \left[|f_n(x)|^2 \omega_n + |\varphi_n(x)|^2 (1 - \omega_n) \right] \\ & - V \sum_{l,n} \int d^3r \left[\varphi_l(x) f_l^*(x) (1 - 2\omega_l) \cdot \varphi_n^*(x) f_n(x) (1 - 2\omega_n) \right. \\ & \left. + 2k_B T \sum_n \left\{ \omega_n \ln \omega_n + (1 - \omega_n) \ln (1 - \omega_n) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Wir minimalisieren die freie Energie im Hinblick auf ω_k , wobei k eine der Quantenzahlen n, l aus Gl. (3.11) darstellt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \omega_k} = & 2 \int d^3r \left\{ f_k^*(x) \left[\frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 + U_0(x) - \mu \right] f_k(x) - \varphi_k(x) \left[\frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 + U_0(x) - \mu \right] \varphi_k^*(x) \right\} \\ & - 2 \int d^3r \left[|f_k(x)|^2 - |\varphi_k(x)|^2 \right] \cdot V \sum_n \left[|f_n(x)|^2 \omega_n + |\varphi_n(x)|^2 (1 - \omega_n) \right] \\ & + 2 \int d^3r \left[\varphi_k(x) f_k^*(x) \cdot V \sum_n \varphi_n^*(x) f_n(x) (1 - 2\omega_n) + \varphi_k^*(x) f_k(x) \cdot V \sum_n \varphi_n(x) f_n^*(x) (1 - 2\omega_n) \right] \\ & + 2k_B T \ln \frac{\omega_k}{1 - \omega_k}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Derjenige Wert ω_k , für den $\partial F / \partial \omega_k = 0$ ist, macht die freie Energie zum Minimum. Die Gl. (3.12) enthält die selbst-konsistenten Potentiale $U(x)$ und $\Delta(x)$ wie sie für Spin-Isotropie $\omega_{n\pm\sigma} = \omega_n$ in den Gln. (1.20) und (1.21) definiert worden sind. Zweifache partielle Integration ergibt

$$\int d^3r \varphi_{\mathbf{k}}^{(x)} \left(\frac{\vec{\nabla}}{i} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \varphi_{\mathbf{k}}^{(x)*} = \int d^3r \varphi_{\mathbf{k}}^{(x)*} \left(\frac{\vec{\nabla}}{i} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \varphi_{\mathbf{k}}^{(x)} ,$$

und die Bestimmungsgleichung für $\omega_{\mathbf{k}}$ wird zu

$$0 = \int d^3r \left\{ \varphi_{\mathbf{k}}^* \left[\frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + U_0(x) - \mu + U(x) \right] \varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{k}}^* \left[\frac{1}{2m} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + U_0(x) - \mu + U(x) \right] \varphi_{\mathbf{k}} + \varphi_{\mathbf{k}}^* \Delta(x) \varphi_{\mathbf{k}} + \varphi_{\mathbf{k}}^* \Delta(x) \varphi_{\mathbf{k}} \right\} + k_B T \ln \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{1 - \omega_{\mathbf{k}}} . \quad (3.13)$$

Beim Vergleich des Integranden in Gl. (3.13) mit den Quasiteilchen-Gleichungen (1.22) sehen wir, daß wir die Gl. (3.13) in der Form

$$0 = \int d^3r \left\{ \varphi_{\mathbf{k}}^* i \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\mathbf{k}} + \varphi_{\mathbf{k}}^* i \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\mathbf{k}} \right\} + k_B T \ln \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{1 - \omega_{\mathbf{k}}} \quad (3.14)$$

schreiben können, wenn wir im Integranden die beiden Terme proportional zu $(e^{\pm i 2 S_{\mathbf{k}}} - 1)$ vernachlässigen, die von der Größenordnung $1/N$ sind.

Im Gleichgewicht, in dem alles stationär ist, können wir für die Wellenfunktionen schreiben

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{(x)} = \varphi_{\mathbf{k}}^{(r)} e^{-i E_{\mathbf{k}} t} , \quad \varphi_{\mathbf{k}}^{(x)*} = \varphi_{\mathbf{k}}^{(r)*} e^{-i E_{\mathbf{k}} t} . \quad (3.15)$$

$E_{\mathbf{k}}$ kann als die Energie eines Quasiteilchens im Quantenzustand $(\mathbf{k} \pm \mathbf{e})$ verstanden werden und wird als Eigenwert der gekoppelten Quasiteilchen-Gleichungen (1.22) bestimmt.

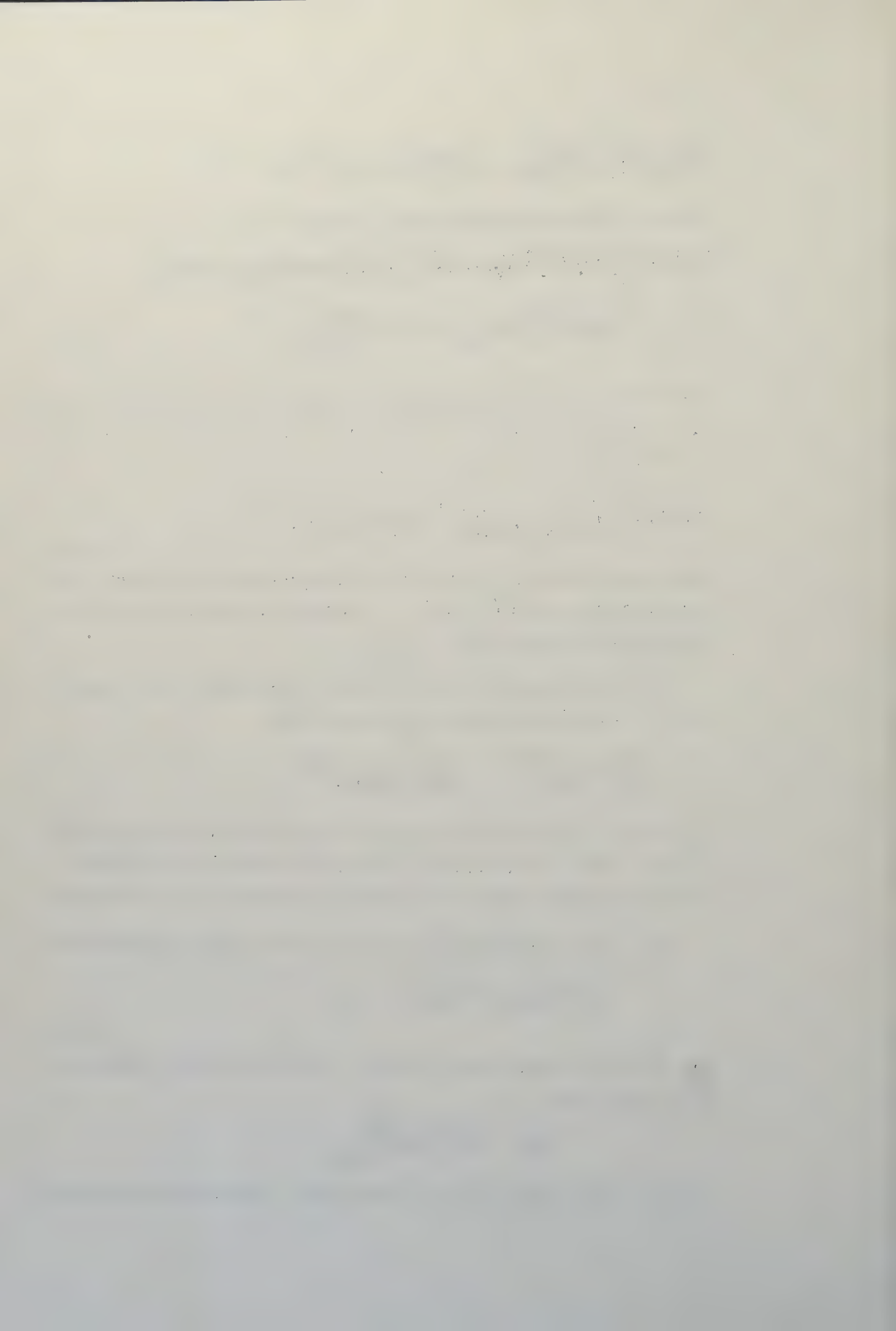
Mit der Normierung der Quasiteilchen-Wellenfunktionen

$$\int d^3r \left[|\varphi_{\mathbf{k}}^{(x)}|^2 + |\varphi_{\mathbf{k}}^{(x)*}|^2 \right] = 1 \quad (3.16)$$

und der Gl. (3.15) wird die Gl. (3.14) nach der Umbenennung von $\mathbf{k}$ in $\mathbf{n}$ zu

$$E_{\mathbf{n}} = -k_B T \ln \frac{\omega_{\mathbf{n}}}{1 - \omega_{\mathbf{n}}} .$$

Daraus sehen wir, daß die Verteilung der angeregten Quasi-



teilchen von der Fermifunktion

$$W_n = \frac{1}{e^{\frac{E_n}{k_B T}} + 1} \quad (3.17)$$

geregelt wird.

Die Gln. (1.20 - 1.22), (2.18) und (3.17) beschreiben vollständig einen schwach koppelnden Supraleiter, in dem sich die normalen und supraleitenden Gebiete räumlich und zeitlich ändern können.

4. Der Strom durch eine N-S Phasengrenze

In diesem Abschnitt wollen wir ein angeregtes Quasiteilchen untersuchen, das sich in einem extremen Supraleiter I. Art bewegt und dabei eine ebene Phasengrenze in der Umgebung von $z \geq 0$ durchdringen muß. Das Gebiet, in dem die räumliche Koordinate $z < 0$ ist, wird als normal angenommen, während das Gebiet für $z > 0$ supraleitend sein soll. Wir machen die "Gelatine-Näherung"¹⁷⁾ für das Metall, indem wir annehmen, daß $U_0(x) + U_{\pm}(x)$ in den Quasiteilchen-Gleichungen (1.22) von Ort und Zeit unabhängig ist. Im Falle der Spin-Isotropie setzen wir

$$\epsilon_F \equiv U_0(x) - \mu + U(x) \quad (4.1)$$

und bezeichnen ϵ_F als die Fermi-Energie in der "Gelatine-Näherung".

Da in der Gleichgewichtskonfiguration kein Strom fließen soll, nehmen wir das Paarpotential $\Delta(x)$ als reell an. Es soll nur von z abhängen. Obwohl keine Phasengrenze ohne ein Magnetfeld existieren kann, vernachlässigen wir das Vektorpotential $\vec{A}$, weil das Magnetfeld die Phasengrenze in einem extremen Supraleiter I. Art in nur ganz geringem Maße durchdringen kann. Den Einfluß von $\vec{A}$ auf das normale Gebiet halten wir in diesem Zusammenhang für unwichtig.



Mathews⁸⁾ hat diese Näherungen im Detail diskutiert. Wir setzen $e^{\pm i 2 \delta_e} \approx 1$, und die Quasiteilchen-Gleichungen (1.22) nehmen die erheblich vereinfachte Form an

$$i \frac{\partial}{\partial t} f(x) = - \left[\frac{\nabla^2}{2m} + \epsilon_F \right] f(x) + \Delta(z) \psi(x) , \quad (4.2a)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = \left[\frac{\nabla^2}{2m} + \epsilon_F \right] \psi(x) + \Delta(z) f(x) . \quad (4.2b)$$

Mit den Definitionen

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} \equiv \Psi(x) = \chi(z) e^{i k_y y} e^{-i E t} , \quad (4.3)$$

$$k_y = k_x x + k_y y ,$$

$$\epsilon_z \equiv \epsilon_F - \frac{k_z^2}{2m} , \quad (4.4)$$

$$\sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir die Quasiteilchen-Gleichungen in der kondensierten Spinor-Schreibweise¹²⁾

$$E \chi(z) = - \left[\frac{\nabla^2}{2m} + \epsilon_z \right] \sigma_z \chi(z) + \Delta(z) \sigma_x \chi(z) . \quad (4.5)$$

Wenn $z \rightarrow -\infty$ geht, können wir $\Delta(z) = 0$ setzen. Die asymptotischen Lösungen von Gl. (4.5) sind dann

$$\chi(z \rightarrow -\infty) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i k_0^+ z} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i k_0^+ z} + C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i k_0^- z} + D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i k_0^- z} , \quad (4.6)$$

wobei

$$k_0^\pm = \sqrt{2m(\epsilon_z \pm E)} \quad (4.7)$$

ist. Die erste Wellenfunktion in Gl. (3.6) beschreibt ein Elektron, das auf die Phasengrenze einfällt, die zweite ein



Elektron, das von der Grenzschicht reflektiert wird, die dritte ein von der Grenzschicht reflektiertes Loch und die vierte ein auf die Grenze einfallendes Loch.

In dem Gebiet $z \rightarrow \infty$ ist $\Delta(z) = \Delta$ unabhängig von z , und die asymptotische Lösung der Gl. (4.5) lautet

$$\chi(z \rightarrow \infty) = a \left(\frac{\sqrt{1+\Delta}}{\sqrt{1-\Delta}} \right) e^{ik_{\Delta}^+ z} + b \left(\frac{\sqrt{1+\Delta}}{\sqrt{1-\Delta}} \right) e^{-ik_{\Delta}^+ z} + c \left(\frac{\sqrt{1-\Delta}}{\sqrt{1+\Delta}} \right) e^{ik_{\Delta}^- z} + d \left(\frac{\sqrt{1-\Delta}}{\sqrt{1+\Delta}} \right) e^{-ik_{\Delta}^- z} \quad (4.8)$$

Hierbei ist

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{E^2}}, \quad k_{\Delta}^{\pm} = \sqrt{m^2 [E_{\pm}^2 \pm \sqrt{E^2 - \Delta^2}]} \quad (4.9)$$

Jede der Wellenfunktionen in Gl. (4.8) hat elektron- und lochartige Komponenten, doch beschreiben für $E > \Delta$ die beiden ersten Wellenfunktionen Anregungen, in denen der "Elektronen-Charakter" vorherrscht während die letzten beiden "Loch-Charakter" haben.

Wir nehmen eine Anregung dann ein "Elektron" oder sagen, daß sie "Elektronen-Charakter" besitzt, wenn ihre Gruppengeschwindigkeit $\vec{v}_g = \partial E / \partial \vec{k}$, wie sie aus den Gln. (4.7) oder (4.9) berechnet werden kann, parallel zum Impuls $\vec{k} = n_1 \vec{k}_s + n_2 \vec{k}_{0,\Delta}$ ist. Eine Anregung ist ein "Loch" oder hat "Loch-Charakter", wenn $\vec{v}_g$ anti-parallel zu $\vec{k}$ ist.

Wir stellen fest, daß nur die Lösungen (4.8) endliche Produkte $\Psi^* \Psi$ und somit ein von Null verschiedenes Paarpotential ergeben. Man kann leicht bestätigen, daß für einen Supraleiter, in dem überall $\Delta(z) = \Delta = \text{const.}$ ist, die Lösungen (4.8) alle Ergebnisse der ursprünglichen BCS Theorie¹⁴⁾ liefern.

Als nächsten Schritt sollten wir die Gl. (3.5) im Grenzgebiet lösen, in dem sich $\Delta(z)$ mit z ändert, und die Wellenfunktionen an die asymptotischen Lösungen (4.6) und (4.8) anschließen.

Das vorschriftsmäßige Verfahren wäre: nimm eine möglichst realistische Funktion für $\Delta(z)$ an, berechne damit die Lösungen der Gl. (4.5), setze diese in die Selbstkonsistenzbedingung (1.21) ein, verbessere das Paarpotential, wenn Gl. (1.21) nicht gut genug befriedigt wird, berechne damit die Wellenfunktionen aufs neue usw. In der Praxis ist das eine sehr mühselige Aufgabe, die von Mathews¹⁸⁾ in Angriff genommen, aber noch nicht vollständig gelöst wurde.

Weil wir glauben, daß für das qualitative Verständnis der Vorgänge in der Phasengrenze eine vollständige Selbstkonsistenz nicht wesentlich ist, folgen wir Andreev⁹⁾ in der Wahl einer Stufenfunktion für das Paarpotential:

$$\Delta(z) = \Delta^*(z) = \Delta\theta(z) = \begin{cases} \Delta & \text{wenn } z > 0 \\ 0 & \text{wenn } z < 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

so daß links von $z=0$ das normale und rechts davon das supraleitende Gebiet liegt. Dann gelten die Wellenfunktionen (4.6) für alle Werte $z < 0$ und (4.8) für alle $z > 0$. Wir schließen die Funktionen aneinander an, indem wir fordern, daß sie selbst und ihre ersten Ableitungen bei $z=0$ stetig sind. Das liefert uns vier Anschlußbedingungen, zu denen die Normierungsbedingung (3.16) hinzukommt. Darum können drei der acht Konstanten frei gewählt und gleich Null gesetzt werden, je nachdem welches Quasiteilchen aus welcher Richtung auf die Phasengrenze auffällt. Wenn $E > \Delta$ ist, gibt es folgende Möglichkeiten:

A. Einfall von links

1. Ein Elektron fällt von links ein, reflektiert werden ein Loch und ein Elektron; nach rechts laufen Quasiteilchen mit Elektron- und Loch-Charakter weiter. Dafür muß $D=0=C=b$ sein. Mit

$$\frac{C}{A} \approx \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \equiv R \quad (4.11)$$

ist die normierte Wellenfunktion im Gesamtvolumen V

$$\chi_1^l(z) = \sqrt{\frac{1+d}{2v}} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{ik_0^+ z} + \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix} e^{ik_0^+ z} \right\} \theta(z) + \begin{bmatrix} 1 \\ R \end{bmatrix} e^{ik_\Delta^+ z} \theta(z) \quad (4.12)$$

2. Ein Loch fällt von links ein, reflektiert werden ein Elektron und ein Loch; nach rechts laufen Quasiteilchen mit Loch- und Elektron-Charakter weiter. Hier müssen wir $A=0=c=b$ setzen, und es ergibt sich

$$\chi_2^l(z) = \sqrt{\frac{1+d}{2v}} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-ik_0^+ z} + \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} e^{-ik_0^+ z} \right\} \theta(z) + \begin{bmatrix} R \\ 1 \end{bmatrix} e^{-ik_\Delta^+ z} \theta(z) \quad (4.13)$$

B. Einfall von rechts

1. Ein Quasiteilchen mit Elektron-Charakter fällt von rechts ein, Quasiteilchen mit Loch- und Elektron-Charakter werden reflektiert; nach links laufen ein Elektron und ein Loch weiter. Dafür ist $c=0=A=D$, und wir erhalten die Wellenfunktion

$$\chi_1^r(z) = \sqrt{\frac{1+d}{2v(1+d^2)}} \left\{ \frac{2d}{\sqrt{1+d}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-ik_0^+ z} \theta(-z) + \left[\frac{\sqrt{1+d}}{\sqrt{1-d}} e^{-ik_\Delta^+ z} - R \frac{\sqrt{1-d}}{\sqrt{1+d}} e^{-ik_0^+ z} \right] \theta(z) \right\} \quad (4.14)$$

2. Ein Quasiteilchen mit Loch-Charakter fällt von rechts ein; Quasiteilchen mit Elektron- und Loch-Charakter werden reflektiert; nach links laufen ein Loch und ein Elektron weiter. Dafür ist $b=0=A=D$; wir finden

$$\chi_2^r(z) = \sqrt{\frac{1+d}{2v(1+d^2)}} \left\{ \frac{2d}{\sqrt{1+d}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{ik_0^+ z} \theta(z) + \left[\frac{\sqrt{1-d}}{\sqrt{1+d}} e^{ik_\Delta^+ z} - R \frac{\sqrt{1+d}}{\sqrt{1-d}} e^{ik_0^+ z} \right] \theta(z) \right\} \quad (4.15)$$

Weil der Koeffizient für die Reflektion des einfallenden Quasiteilchens in der Größenordnung von Δ/ϵ_F liegt, ist er vernachlässigt worden. Nur das jeweilige

"Antiteilchen" wird also reflektiert. Wie Andreev⁹⁾ zuerst festgestellt hat, werden bei der Reflektion an einem Paarpotential alle drei Komponenten der Gruppengeschwindigkeit umgedreht, wenn sich ein Teilchen in sein Antiteilchen verwandelt. Jenseits der Phasengrenze läuft eine Anregung vom Charakter des einfallenden Teilchens weiter, die Amplitude der anderen ist ebenfalls von der Größenordnung Δ/ϵ_F . Wir sehen, daß im Falle B, ähnlich wie beim gewöhnlichen quantenmechanischen Potential, die Amplitude der durchgelassenen Anregung für $E \rightarrow \Delta$ verschwindet.

Wenn $E < \Delta$ wird, ist

$$k_{\Delta}^{\pm} = \sqrt{m(\epsilon_z \pm i\sqrt{\Delta^2 - E^2})} = k_{\xi} \pm i\frac{\kappa}{2}, \quad (4.16)$$

wobei

$$k_{\xi} \equiv \frac{\sqrt{m(\Delta^2 - E^2)}}{[\epsilon_z^2 + \Delta^2 - E^2 - \epsilon_z]^{\frac{1}{2}}} \approx \sqrt{2m\epsilon_z}, \quad (4.17)$$

$$\frac{\kappa}{2} \equiv \sqrt{m} [\epsilon_z^2 + \Delta^2 - E^2 - \epsilon_z]^{\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\frac{m}{2\epsilon_z}(\Delta^2 - E^2)} \quad (4.18)$$

bedeuten, und die Näherungsausdrücke gelten, wenn $\epsilon_z \gg \sqrt{\Delta^2 - E^2}$ ist. Dann sind nur die Lösungen physikalisch sinnvoll, die dem Fall A entsprechen und exponentiell mit z abklingen.

Sie lauten

$$\chi_1(z) = \sqrt{\frac{1}{\theta}} \left\{ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_0^+ z} + \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} e^{ik_0^- z} \right] \theta(z) + \begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix} e^{ik_{\xi} z} e^{-\frac{\kappa}{2} z} \theta(z) \right\}, \quad (4.19)$$

$$\chi_2(z) = \sqrt{\frac{1}{\theta}} \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ik_0^+ z} + \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_0^- z} \right] \theta(z) + \begin{pmatrix} R \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ik_{\xi} z} e^{-\frac{\kappa}{2} z} \theta(z) \right\}. \quad (4.20)$$

Um zu sehen, ob z.B. im Falle A unsere orthonormierten Funktionen ein vollständiges System bilden, vergleichen wir ihre Gesamtzahl mit derjenigen in einem durchgehend normalen Metall. Dort wird der kleinste Abstand zwischen zwei benachbarten Wellenzahlen entlang der z -Achse durch perio-

dische Randbedingungen zu $2\pi/L$ bestimmt, wenn L die Kantenlänge des Periodizitätsvolumens ist. In unserem Falle fordern periodische Randbedingungen an den Stellen $z=0$ und $z=-L$, daß $\chi_1(0) = \chi_1(-L)$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_0^+ L} + \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} e^{-ik_0^- L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

ist. Mit $k_0^\pm = k_\xi \pm q$ wird daraus

$$e^{-ik_0^+ L} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} e^{i2qL} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}.$$

Also folgt, daß $2qL = 2n\pi$, n ganz, sein muß und der Abstand zwischen zwei benachbarten Wellenzahlen

$$\delta q = \frac{\pi}{L} \quad (4.22)$$

beträgt. Die Bedingung $e^{-ik_0^+ L} = 1$ verlangt zusätzlich, daß $k_0^+ L = 2m\pi$ ist. Demnach ergibt sich aus dem kleinsten $k_0^+ = k_\xi + \delta q$ die Wellenzahl k_ξ des tiefsten Zustands $E=0$ als ungeradzahliges Vielfaches von $\frac{\pi}{L}$.

Wir sehen, daß die Dichte der Zustände im Impulsraum wegen $\delta q = \pi/L$ gerade doppelt so groß ist wie im völlig normalen Metall. Andererseits zählen die linear kombinierten Elektronen und Löcher nicht als verschiedene Anregungen, so daß die Gesamtzahl der Zustände gleich der im normalen Metall ist; die gleiche Situation liegt bei Reflektion an einer gewöhnlichen Potentialstufe vor⁺⁾ .

Unser Funktionensystem ist also vollständig, was auch dadurch bestätigt wird, daß wir beim Nullsetzen von anderen Konstantentriplets entweder dieselben Lösungen wie in den Fällen A und B oder die dazu konjugiert komplexen erhalten.

⁺⁾ Auf diese Tatsachen hat Bardeen²⁸⁾ als erster hingewiesen.

Die Quasiteilchen-Wellenfunktionen, die sich aus den Gln. (4.3) und (4.12) - (4.15) ergeben, erlauben die Lösung $S_2(x) = 0$ für die Gl. (2.17), weil $\int_m (\Delta^* \varphi_e^* f_e) = 0$ ist, wenn $E_e > \Delta$ ist. Die Stromdichte der Gl. (2.6), die im normalen Gebiet von einem Elektron und einem Loch getragen wird, setzt sich im supraleitenden Gebiet mit der Quasiteilchen-Anregung fort und ändert sich nicht über die Phasengrenze. Daher kann in der Grenzfläche keine Kraft auf ein Quasiteilchen wirken, dessen Energie $E > \Delta$ ist.

Das Bild ändert sich, wenn wir die Bewegung eines Quasiteilchens betrachten, dessen Energie kleiner als das Paarpotential ist und das daher gemäß den Gln. (4.19) und (4.20) im supraleitenden Gebiet zerfällt. Wir nehmen in dem normalen Gebiet ein Elektron mit den Quantenzahlen (15) und der Energie $0 < E_e < \Delta$ an, das auf die Grenzfläche einfällt. Aus den Gln. (4.3), (4.16) - (4.18) und (4.19) folgt, daß

$$2m \int_m [\Delta^* \varphi_e^* f_e] = 2m \sqrt{\Delta^2 - E_e^2} \frac{e^{-x_e z}}{v} \theta(z) = \kappa_e k_{e\zeta} \frac{e^{-x_e z}}{v} \theta(z) \quad (4.23)$$

ist.

Wir setzen das in Gl. (2.17) ein, approximieren $e^{-i2S_e} \approx 1$ und erhalten

$$\text{div} \vec{\nabla} S_e \left\{ \sum_n 2[|f_n|^2 \omega_n + |\varphi_n|^2 (1 - \omega_n)] - |\varphi_e|^2 \right\} = 2\kappa_e k_{e\zeta} \frac{e^{-x_e z}}{v} (1 - \omega_e) \theta(z); \quad (4.24)$$

$\omega_{n,l}$ ist durch Gl. (3.17) gegeben, und $\omega_e[|f_e|^2 - |\varphi_e|^2] = 0$ weil $|R|^2 = 1$ ist. Für $z > 0$ gibt die Summe in Gl. (4.24) die Elektronendichte $\frac{N}{v}$ in diesem Gebiet an. (N ist ungefähr die Hälfte der Elektronenzahl im Metall. Man sieht das, wenn man die Wellenfunktionen der Quasiteilchen in die Gl. (4.24) einsetzt. Die Zahl der Zustände mit $E < \Delta$ verhält sich zur Gesamtzahl aller Elektronen wie Δ/ϵ_F). Wir können daher für die linke Seite der Gl. (4.24) mit dem Symbol $\frac{\partial^2}{\partial s^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ schreiben

$$\text{div} \vec{\nabla} S_e \frac{N}{v} = \frac{N}{v} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} S_e + \frac{\partial^2}{\partial s^2} S_e \right]. \quad (4.25)$$

Die Gln. (4.24) und (4.25) stellen eine Differentialgleichung für S_ℓ vom Poissonschen Typ dar:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} S_\ell + \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} S_\ell = \frac{2}{N} (1 - w_\ell) x_\ell k_{\ell\bar{\ell}} e^{-x_\ell^2} \Theta(z). \quad (4.26)$$

Wir transformieren sie mit dem Ansatz

$$S_\ell = \frac{2}{N} (1 - w_\ell) \left\{ k_{\ell\bar{\ell}} \left[z + \frac{1}{x_\ell} (e^{-x_\ell^2} - 1) \right] \Theta(z) + L(z, \vartheta) \right\} \quad (4.27)$$

in die Laplace Gleichung

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial \vartheta^2} = 0. \quad (4.28)$$

Aus den noch zu ermittelnden Grenzbedingungen werden wir sehen, daß man Gl. (4.28) mit der trivialen Lösung

$$L = \text{const.} = 0 \quad (4.29)$$

befriedigen kann. Damit ist

$$\vec{\nabla} S_\ell = \frac{2}{N} (1 - w_\ell) \left\{ n_z k_{\ell\bar{\ell}} (1 - e^{-x_\ell^2}) \Theta(z) \right\}. \quad (4.30)$$

Wir setzen die Quasiteilchen-Wellenfunktionen und $\vec{\nabla} S_\ell$ aus Gl. (4.30) in die Gl. (2.6) für die Stromdichte mit $\vec{A} = 0$ ein. Wir definieren, daß negative Quantenzahlen negative Impulse bedeuten. Alle Gradienten der Wellenfunktionen heben sich in der Summe gegenseitig auf, außer dem einen, der mit $w_{-\ell\bar{\ell}} = w_\ell$ multipliziert ist, weil dessen Partner $w_{\ell\bar{\ell}} = 0$ per definitionem ist; wegen $E_{-\ell} = E_\ell$ ist $w_{-\ell} = w_\ell$.

Demnach ist

$$\vec{j}_\ell = \frac{2e}{m\vartheta} \left\{ [n_s k_{\ell\bar{\ell}} + n_z k_{\ell\bar{\ell}}] \Theta(z) + [n_s k_{\ell\bar{\ell}} + n_z k_{\ell\bar{\ell}}] e^{-x_\ell^2} + n_z k_{\ell\bar{\ell}} (1 - e^{-x_\ell^2}) \right\} (1 - w_\ell) \quad (4.31)$$

die Stromdichte einer Konfiguration, in der der Zustand

(15) mit einem angeregten Quasiteilchen der Energie $E_e < \Delta$ besetzt ist und auf alle übrigen angeregten Zustände die Quasiteilchen gemäß der Fermifunktion (3.17) verteilt sind.

Wir stellen fest, daß nach Gl. (4.31) die Stromdichte und damit der Impuls parallel zur Phasengrenze exponentiell mit wachsendem $z > 0$ abnehmen, während in z -Richtung ein konstanter Strom fließt. Wir werden im nächsten Abschnitt prüfen, ob mit diesem räumlichen Abklingen eine zeitliche Änderung des Impulses und also eine Kraft in der Grenzschicht verbunden ist.

5. Die zeitliche Änderung des Impulses in der Phasengrenze +)

Wir setzen den Impulsoperator für verschwindendes Vektorpotential, $\hat{O}_p = \hat{p}/i$, in die Gl. (2.4) ein. Das ergibt als mittlere Impulsdichte der Konfiguration $|T_{e5}\rangle$

$$\begin{aligned} \vec{P}_{e5} = & \left(\hat{f}_e^* \frac{\vec{\nabla}}{i} \hat{f}_e - \hat{\varphi}_e \frac{\vec{\nabla}}{i} \hat{\varphi}_e^* \right) (1 - \omega_e) + \vec{\nabla} S_e \left\{ \sum_n 2 \left[|\hat{f}_n|^2 \omega_n + |\hat{\varphi}_n|^2 (1 - \omega_n) \right] - |\hat{\varphi}_e|^2 \right\} \\ & + \sum_n 2 \left[\hat{f}_n^* \frac{\vec{\nabla}}{i} \hat{f}_n \omega_n + \hat{\varphi}_n \frac{\vec{\nabla}}{i} \hat{\varphi}_n^* (1 - \omega_n) \right] . \end{aligned} \quad (5.1)$$

Die Kraftdichte, die auf das Fermionensystem wirkt, ist gleich $\frac{d}{dt} \vec{P}_{e5}$. Wir erhalten mit Hilfe der vereinfachten Quasiteilchen-Gleichungen (4.2)

$$\frac{d}{dt} \left(\hat{f}_e^* \frac{\vec{\nabla}}{i} \hat{f}_e \right) = \frac{1}{2m} \left\{ \hat{f}_e^* \vec{\nabla}^2 \hat{f}_e - \vec{\nabla}^2 \hat{f}_e^* \hat{f}_e \right\} + \Delta(z) \left[\hat{\varphi}_e^* \vec{\nabla} \hat{f}_e - \hat{f}_e \vec{\nabla} \hat{\varphi}_e^* \right] - \hat{f}_e^* \hat{\varphi}_e \vec{\nabla} \Delta(z) , \quad (5.2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\hat{\varphi}_e \frac{\vec{\nabla}}{i} \hat{\varphi}_e^* \right) = \frac{1}{2m} \left\{ \hat{\varphi}_e \vec{\nabla}^2 \hat{\varphi}_e^* - \vec{\nabla}^2 \hat{\varphi}_e \hat{\varphi}_e^* \right\} - \Delta(z) \left[\hat{f}_e \vec{\nabla} \hat{\varphi}_e^* - \hat{\varphi}_e \vec{\nabla} \hat{f}_e^* \right] + \hat{f}_e^* \hat{\varphi}_e \vec{\nabla} \Delta(z) . \quad (5.3)$$

Da $\vec{\nabla} S_e$ nur von räumlichen Koordinaten abhängt und die Elektronendichte im Gleichgewicht, $\sum_n 2 \left[|\hat{f}_n|^2 \omega_n + |\hat{\varphi}_n|^2 (1 - \omega_n) \right]$,

+) Am Ende dieses Abschnitts wird ein während der Korrektur gefundener, modellunabhängiger Beweis für Impulserhaltung an der Phasengrenze angegeben.

per definitionem zeitlich unabhängig ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{\nabla} S_e \left\{ \sum_n 2 [|\mathbf{f}_n|^2 \omega_n + |\varphi_n|^2 (1 - \omega_n)] - |\varphi_e|^2 \right\} = \\ = - \vec{\nabla} S_e \frac{d}{dt} |\varphi_e|^2 = \vec{\nabla} S_e \left\{ \frac{1}{m} \operatorname{Re} \operatorname{div} [\varphi_e \vec{\nabla} \varphi_e^*] - 2 \operatorname{Im} \Delta^* \varphi_e^* \mathbf{f}_e \right\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Mit der Definition (1.21) des reellen Paarpotentials einer Gleichgewichtskonfiguration und den Gln. (5.2) - (5.5) wird die zeitliche Änderung der Impulsdichte zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{P}_{es} = & \left\{ \frac{1}{2m} [\mathbf{f}_e^* \vec{\nabla} \nabla^2 \mathbf{f}_e - \nabla^2 \mathbf{f}_e^* \cdot \vec{\nabla} \mathbf{f}_e - \varphi_e^* \vec{\nabla} \nabla^2 \varphi_e + \nabla^2 \varphi_e \cdot \vec{\nabla} \varphi_e^*] + i 2 \Delta(z) \vec{\nabla} \operatorname{Im} \varphi_e^* \mathbf{f}_e \right. \\ & - 2 \mathbf{f}_e^* \varphi_e \vec{\nabla} \Delta(z) \left. \right\} (1 - \omega_e) + \vec{\nabla} S_e \left\{ \frac{1}{m} \operatorname{Re} \operatorname{div} [\varphi_e \vec{\nabla} \varphi_e^*] - 2 \operatorname{Im} \Delta(z) \varphi_e^* \mathbf{f}_e \right\} \\ & + \frac{1}{2m} \sum_n 2 \left\{ [\mathbf{f}_n^* \vec{\nabla} \nabla^2 \mathbf{f}_n - \nabla^2 \mathbf{f}_n^* \cdot \vec{\nabla} \mathbf{f}_n] \omega_n + [\varphi_n^* \vec{\nabla} \nabla^2 \varphi_n - \nabla^2 \varphi_n \cdot \vec{\nabla} \varphi_n^*] (1 - \omega_n) \right\} \\ & + 2 \vec{\nabla} \Delta(z) \cdot \frac{\Delta(z)}{v} - 2 \Delta(z) \sum_n \left\{ [\mathbf{f}_n^* \vec{\nabla} \varphi_n^* - \varphi_n^* \vec{\nabla} \mathbf{f}_n^*] - i 2 \vec{\nabla} \operatorname{Im} \varphi_n^* \mathbf{f}_n \omega_n \right\}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Wir schreiben um:

$$i 2 \Delta(z) \vec{\nabla} \operatorname{Im} \varphi_e^* \mathbf{f}_e - 2 \mathbf{f}_e^* \varphi_e \vec{\nabla} \Delta(z) = i 2 \vec{\nabla} \operatorname{Im} [\Delta(z) \varphi_e^* \mathbf{f}_e] - 2 \operatorname{Re} \mathbf{f}_e^* \varphi_e \vec{\nabla} \Delta(z). \quad (5.6)$$

Wenn das Paarpotential $\Delta(z)$ die Stufenfunktion der Gl. (4.10) ist, sind die Gradienten bei $z = 0$ in Gl. (5.6) und in $\Delta(z) \cdot \frac{\vec{\nabla} \Delta(z)}{v}$ unbestimmt. Auf jeden Fall könnten diese Terme nur z -Komponenten zur Kraftdichte beitragen. Für $z > 0$ wird die Gl. (5.5) mit den Gln. (3.10) und (5.6)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_{15} = & \left\{ \frac{1}{2m} \left[\dot{f}_e^* \nabla^2 \dot{f}_e - \nabla^2 \dot{f}_e^* \cdot \dot{f}_e - (\dot{\varphi}_e \nabla \nabla^2 \varphi_e^* + \nabla^2 \varphi_e \cdot \nabla \varphi_e^*) + i 2 \nabla \cdot \nabla \text{Im} [\Delta \varphi_e^* \dot{f}_e] \right] \right\} (1 - \omega_e) + \\ & + \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{m} \text{Re} \text{div} [\varphi_e \nabla \varphi_e^*] - 2 \text{Im} \Delta \varphi_e^* \dot{f}_e \right\} - 2 \Delta \sum_n \left\{ \left[\dot{f}_n \nabla \varphi_n^* - \varphi_n \nabla \dot{f}_n^* \right] - i 2 \nabla \cdot \text{Im} [\varphi_n^* \dot{f}_n \omega_n] \right\} + \\ & + \frac{1}{2m} \sum_n 2 \left\{ \left[\dot{f}_n^* \nabla^2 \dot{f}_n - \nabla^2 \dot{f}_n^* \cdot \dot{f}_n \right] \omega_n + \left[\varphi_n \nabla \nabla^2 \varphi_n^* - \nabla^2 \varphi_n \cdot \nabla \varphi_n^* \right] (1 - \omega_n) \right\} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Wir setzen die Quasiteilchen-Wellenfunktionen, wie sie durch die Gln. (4.3) (4.12), (4.13), (4.19) und (4.20) gegeben werden, in die Gl. (5.7) ein. Das ergibt mit Gl. (4.23)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_{15} = & \frac{1}{2m\omega} \left\{ e^{-k_e z} i \left[\mu_s k_{eS} + \mu_z \left(k_{eF} + i \frac{k_e}{2} \right) \right] \left[k_{eS}^2 + \left(k_{eF} - i \frac{k_e}{2} \right)^2 - k_{eS}^2 - \left(k_{eF} + i \frac{k_e}{2} \right)^2 \right] - \right. \\ & - e^{-k_e z} i \left[\mu_s k_{eS} + \mu_z \left(k_{eF} - i \frac{k_e}{2} \right) \right] \left[k_{eS}^2 + \left(k_{eF} - i \frac{k_e}{2} \right)^2 - k_{eS}^2 - \left(k_{eF} + i \frac{k_e}{2} \right)^2 \right] + \\ & \left. + i 2 \nabla \cdot [k_e k_{eF} e^{-k_e z}] \right\} (1 - \omega_e) \\ & + \frac{1}{2m\omega} \sum_n^{E_n < \Delta} 2 e^{-k_n z} \left\{ i \left[\mu_s k_{nS} + \mu_z \left(k_{nF} + i \frac{k_n}{2} \right) \right] \left[k_{nS}^2 + \left(k_{nF} - i \frac{k_n}{2} \right)^2 - k_{nS}^2 - \left(k_{nF} + i \frac{k_n}{2} \right)^2 \right] \omega_n + \right. \\ & + i \left[\mu_s k_{nS} + \mu_z \left(k_{nF} - i \frac{k_n}{2} \right) \right] \times \\ & \times \left[k_{nS}^2 + \left(k_{nF} - i \frac{k_n}{2} \right)^2 - k_{nS}^2 - \left(k_{nF} + i \frac{k_n}{2} \right)^2 \right] (1 - \omega_n) \\ & \left. + i 2 \left[\mu_s k_{nS} + \mu_z \left(k_{nF} - i \frac{k_n}{2} \right) \right] i k_n k_{nF} - i 2 k_n^2 k_{nF} \omega_n \right\} = \\ & = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Somit ändert sich in dem Grenzgebiet $z \geq 0$ die Impulsdichte nicht mit der Zeit, obwohl ihre Komponente parallel zur Grenzfläche exponentiell mit z abnimmt. Dies Ergebnis mag einen auf den ersten Blick etwas verwirren, falls man eine Kraftdichte proportional zu $\mu_s k_{eS} \frac{k_{eF}}{m} e^{-k_e z}$ erwartet hat. Aber wenn wir die Natur einer Quasiteilchen-Anregung etwas

genauer betrachten, klären sich die Verhältnisse schnell auf.

Wir definieren die Gruppengeschwindigkeit $\vec{v}_g$ eines Quasiteilchens in einem Supraleiter analog zu der eines einzelnen Elektrons:

$$\vec{v}_g \equiv \frac{d}{dt} \langle \vec{r} \rangle = \frac{d}{dt} \int d^3r \Psi_{(x)}^\dagger \vec{r} \Psi_{(x)} = \int d^3r [\dot{\Psi}_{\vec{r}}^\dagger \Psi + \Psi_{\vec{r}}^\dagger \dot{\Psi}] , \quad (5.9)$$

wobei wie in Gl. (4.3) $\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix}$ ist.

Die vereinfachten Quasiteilchen-Gleichungen (4.2) sind in der Spinor-Schreibweise

$$\dot{\Psi} = i \left[\frac{\nabla^2}{2m} + \epsilon_F \right] \sigma_z \Psi - i \Delta \sigma_x \Psi ,$$

und damit wird

$$\vec{v}_g = \frac{i}{2m} \int d^3r [\Psi_{\vec{r}}^\dagger \nabla^2 \sigma_z \Psi - \nabla^2 \Psi_{\vec{r}}^\dagger \sigma_z \Psi] .$$

Wir nehmen an, daß Ψ ein Wellenpaket großer aber endlicher Ausdehnung beschreibt. Dann ergibt eine zweifache partielle Integration

$$\begin{aligned} \vec{v}_g &= \frac{i}{2m} \int d^3r [\Psi_{\vec{r}}^\dagger \nabla^2 \sigma_z \Psi - \Psi_{\vec{r}}^\dagger \nabla^2 \sigma_z \Psi] = -\frac{i}{m} \int d^3r (\psi^* \varphi^*) \vec{\nabla} \sigma_z \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} , \\ \vec{v}_g &= \frac{1}{m} \int d^3r \left[\psi^* \frac{\vec{\nabla}}{i} \varphi - \varphi^* \frac{\vec{\nabla}}{i} \psi \right] . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Wir sehen, daß die elektronenartigen und die lochartigen Quasiteilchen-Komponenten Beiträge mit entgegengesetzten Vorzeichen zur Gruppengeschwindigkeit liefern. Weil nach der Definition (5.9) $\vec{v}_g$ reell sein muß, können wir schreiben

$$\begin{aligned} \vec{v}_g &= \vec{v}_e + \vec{v}_l , \\ \vec{v}_e &= \frac{1}{m} \operatorname{Re} \int d^3r \psi^* \frac{\vec{\nabla}}{i} \varphi , \quad \vec{v}_l = -\frac{1}{m} \operatorname{Re} \int d^3r \varphi^* \frac{\vec{\nabla}}{i} \psi . \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die in Gl. (5.10) definierte Gruppengeschwindigkeit ist mit $\text{Re } \partial E / \partial \vec{k}$ identisch. Wir sehen das an der $E - \vec{k}$ Beziehung

$$E = \sqrt{\left[\frac{1}{2m} (\vec{k}_s^2 + \vec{k}_A^2) - \epsilon_F \right]^2 + \Delta^2} \quad (5.12)$$

eines Quasiteilchens, das von der durch die Gln. (4.3) und (4.12) definierten Wellenfunktion beschrieben wird. Aus Gl. (5.12) folgt

$$\frac{\partial E}{\partial \vec{k}} = \frac{1}{E} \left[\frac{1}{2m} (\vec{k}_s^2 + \vec{k}_A^2) - \epsilon_F \right] \cdot \frac{1}{m} (n_s \vec{k}_s + n_z \vec{k}_A) = \frac{1}{E} \sqrt{E^2 - \Delta^2} \cdot \frac{1}{m} (n_s \vec{k}_s + n_z \vec{k}_A),$$

was gleich der nach Gl. (5.10) berechneten Gruppengeschwindigkeit

$$\vec{v}_g = \frac{1}{m} \int d^3r \left(\frac{1+\chi}{2\chi} \right) (n_s \vec{k}_s + n_z \vec{k}_A) \left(1 - \frac{1-\chi}{1+\chi} \right) = \sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{E^2}} \cdot \frac{1}{m} (n_s \vec{k}_s + n_z \vec{k}_A) \quad (5.13)$$

ist. Weil die Gruppengeschwindigkeit (5.13) parallel zum Quasiteilchen-Impuls $\vec{P} = \int d^3r \left[\vec{r}^* \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{r}^* \right] = n_s \vec{k}_s + n_z \vec{k}_A$ ist, hat die durch Gl. (4.12) beschriebene Anregung Elektronen-Charakter. Aber wir stellen fest, daß $\vec{v}_g$ um den Faktor $\sqrt{1 - \Delta^2/E^2}$ kleiner ist als die Geschwindigkeit $\vec{k}_s/m$ eines freien Elektrons. Derselbe Faktor reduziert auch die Gruppengeschwindigkeit einer Anregung mit Loch-Charakter von ihrem freien Wert $-\frac{1}{m} (n_s \vec{k}_s + n_z \vec{k}_A)$ auf $-\frac{1}{m} \vec{k}_L \sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{E^2}}$.

Die Geschwindigkeiten der elektronenartigen und lochartigen Komponenten, die in Gl. (5.11) definiert sind, kann man durch den Impuls der entsprechenden freien Anregung ausdrücken, der mit den räumlich gemittelten Gewichten der Komponenten multipliziert ist; dabei ist die Lochgeschwindigkeit dem Impuls entgegengerichtet. Also ist die Gruppengeschwindigkeit (5.10) einer Quasiteilchen-Anregung gleich dem Produkt aus freiem Impuls und der Differenz der Gewichte. In der Wellenfunktion (4.12) hat die elektronenartige Komponente das Übergewicht, während in (4.13) die lochartige Komponente schwerer wiegt. Wenn $E \gg \Delta$ ist, verschwindet eine Komponente nahezu und die Anregung wird

zu einem freien Elektron oder einem freien Loch. Für $E = \Delta$ haben beide Komponenten gleiches Gewicht, $\vec{v}_g = 0$, und man kann den Charakter der Anregung nicht mehr bestimmen. Das alles wird durch den reduzierenden Faktor $\sqrt{1 - \Delta^2/E^2}$ ausgedrückt

Der Ablauf der Reflektion eines Quasiteilchens an der Phasengrenze läßt sich folgendermaßen darstellen:

Zur Zeit t_1 befindet sich ein Elektron im normalen Gebiet und sein Massenzentrum bewegt sich mit dem Impuls $\vec{k}_e = n_g k_g + n_z k_0$ und der Geschwindigkeit $\vec{v}_e = \frac{1}{m} \vec{k}_e$ auf die Phasengrenze zu; siehe Fig. 3.

Zur Zeit t_2 ist ein Teil des Wellenpakets in das supraleitende Gebiet eingedrungen und regt dort ein Loch an, das sich mit einer dem Impuls entgegengerichteten Geschwindigkeit auf die Phasengrenze zu bewegt. Unter "Anregung eines Loches" verstehen wir, daß das Elektron in einem der beiden Partnerzustände eines Loch-Paares der Grundzustandskonfiguration hineingestreut wird, so daß eine lochartige Anregung entsteht, die aus dem Supraleiter heraus in das normale Gebiet hineinläuft; siehe Fig. 4.

Zur Zeit t_3 hat das Loch den Supraleiter verlassen und bewegt sich im normalen Gebiet mit dem Impuls $\vec{k}_l = n_g k_g + n_z k_0$ und der Geschwindigkeit $\vec{v}_l = -\frac{1}{m} \vec{k}_l$ von der Phasengrenze weg; siehe Fig. 5. Ein zweites Elektron ist in das supraleitende Gebiet eingedrungen und hat zusammen mit dem ersten "ein Grundzustandspaar gebildet."

Wenn die Energie des einfallenden Elektrons größer als Δ ist, besteht eine größere Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Elektron als Quasiteilchen-Anregung im Supraleiter weiterläuft, als daß es in den Grundzustand gestreut wird und ein zurücklaufendes Loch hinterläßt. Wenn jedoch $E < \Delta$ ist, dann nimmt mit der Zeit die Wahrscheinlichkeit ab, ein Elektron im Supraleiter anzutreffen, das sich mit dem Impuls $n_g k_g + n_z k_z$ weiterbewegt. Dazu komplementär wächst aber im supraleitenden Gebiet die Wahrscheinlichkeit, ein

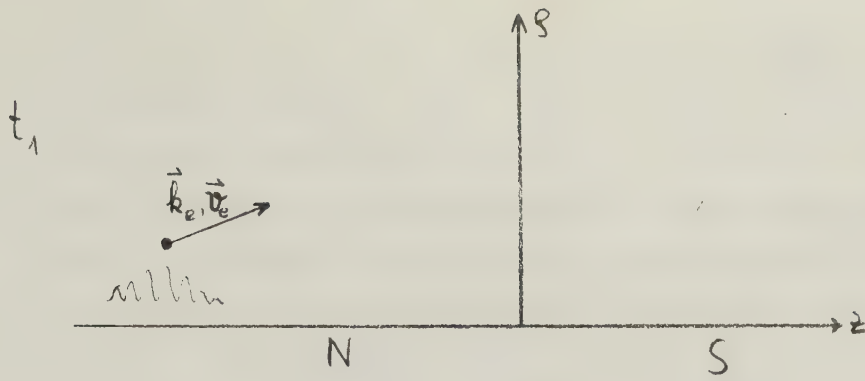


Fig. 3: Ein Elektronen-Wellenpaket fällt auf eine N-S Phasengrenze.

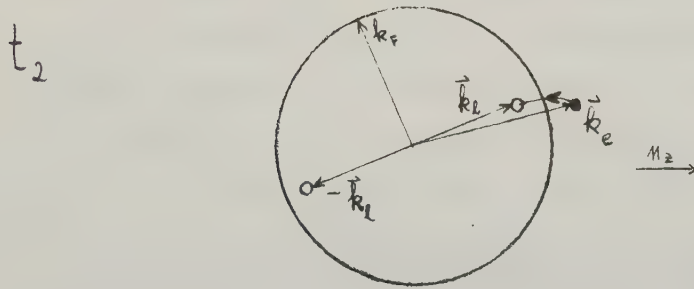


Fig. 4: Ein Loch wird im Supraleiter angeregt.

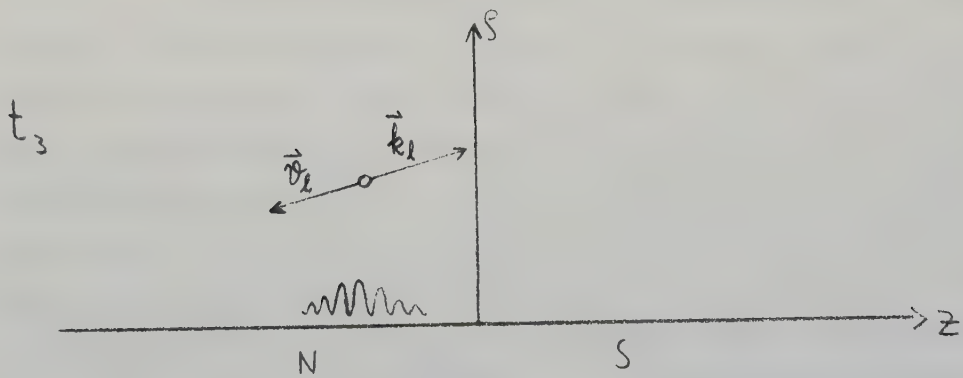


Fig. 5: Ein Loch-Wellenpaket ist von der Phasengrenze reflektiert worden.

Loch anzutreffen, das mit dem Impuls $n_1 k_s + n_2 k_F$ in z-Richtung läuft. Somit wird der Impuls, der mit dem zerfallenden Elektron verlorenggeht, durch das neu auftauchende Loch für das System wiedergewonnen, und darum haben wir keine zeitliche Änderung des Impulses für $z > 0$ in der Gl. (5.8) feststellen können. Nach der mittleren Zeit

$$\tau = \left[\frac{k_F x}{m} \right]^{-1} = [\Delta^2 - E^2]^{-1/2} \rightarrow \frac{\hbar}{\sqrt{\Delta^2 - E^2}}$$

ist das Elektron in das Kondensat übergegangen und das Loch hat den Supraleiter verlassen.

Weil das reflektierte Loch denselben Impuls $n_1 k_s$ parallel zur Grenzfläche hat wie das einfallende Elektron, ist der Impuls in dieser Richtung zu den Zeiten t_1 und t_3 der gleiche, und keine Kraft parallel zur Grenzfläche tritt bei der Reflektion an der Phasengrenze auf. - Da das Impulsgleichgewicht keinen Suprastrom parallel zur Grenzfläche zuläßt, ist die Wahl der Lösung $L = \text{const.} = 0$ für die Gl. (4.28) berechtigt und notwendig.

Die kleine Differenz $k_0^+ - k_0^- = 2mE/k_F$ zwischen den Impulsen senkrecht zur Grenzfläche von Elektron und Loch bleibt bei dem neugeformten Cooper-Paar. Wenn ständig neue Cooper-Paare durch einen stetigen Strom von Elektronen mit der mittleren Energie $E < \Delta$ und dem mittleren z-Impuls $\bar{k}_F$ erzeugt werden, werden sie als Suprastrom mit dem mittleren Impuls pro Cooper-Paar $n_2 2mE/\bar{k}_F$ in z-Richtung fließen. Wir können den stationären Fluß der normalen Elektronen auch durch einen Satz ebener Wellen wie in Gl. (4.19) beschreiben, deren Energien das Intervall zwischen 0 und γE ausfüllen, wobei γ ein Mittelungsparameter der Größenordnung Eins ist. Sie induzieren eine Phasenverschiebung, die die Summe der Phasenverschiebungen S_i von den einzelnen Anregungen ist. Daher ist der Impuls eines Cooper-Paares im Wellenbild gleich $2 \sum_{E_i=0}^{\gamma E} \bar{V} S_i$. Mit $V/2$ als Volumen des supraleitenden Gebietes ist die Gesamtzahl der Elektronen

darin

$$N = 2 \frac{V/2}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} k_F^3 ,$$

und die Anzahl der normalen Anregungen mit Energien bis zu γE , die auf die Phasengrenze einfallen, ist

$$N_{\gamma E} = \frac{V/2}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} \cdot 3 k_F m \gamma E ,$$

wobei k_F der Fermiimpuls ist. Für $T = 0$ und $z \gg 1/\kappa$ erhalten wir mit $\vec{v}_{S_\ell}$ aus Gl. (4.30) den mittleren Paar-Impuls

$$2 \sum_{E_\ell=0}^{\gamma E} \vec{v}_{S_\ell} = 2 N_{\gamma E} \cdot \frac{2}{N} n_z \langle k_{\vec{S}} \rangle_{av.} = n_z \frac{6\pi m E}{k_F^2} \langle k_{\vec{S}} \rangle_{av.} .$$

Weil $1/k_{\vec{S}}$ und $3\pi \langle k_{\vec{S}} \rangle_{av.} / k_F^2$ beide von der Größenordnung $1/k_F$ sind, stimmen die groben Abschätzungen des Impulsgewinns pro Grundzustandspaar aus dem stationären Strom zerfallender Quasiteilchen im Teilchen- und Wellenbild hinreichend gut überein.

Einige abschließende Bemerkungen sollen noch im Hinblick auf die Näherungen gemacht werden, die Phasenverschiebungen von zerfallenden Quasiteilchen betreffen.

1. Eine Phasenverschiebung ändert ihr Vorzeichen mit dem Impuls des Quasiteilchens, das sie induziert.
2. Die Phasenverschiebung von verschiedenen Anregungen ist die Summe der einzelnen Phasenverschiebungen.
3. Der größte Wert einer einzelnen Phasenverschiebung ist

$$S_\ell^{max} \approx \frac{L}{N} k_F \approx N^{-2/3} .$$

(Wir nehmen an, daß das Periodizitätsvolumen des Metalls ein Würfel mit der sehr großen Kantenlänge L ist. Der Ursprung des Koordinaten-Systems liegt im Mittelpunkt des Würfels und die Ebene $z = 0$ ist die Phasengrenze. Darum ist nach Gl. (4.27) bei $T = 0$ $S_\ell^{max}(z=L/2) = (L/N) \cdot k_{\ell\vec{S}} \approx (L/N) \cdot k_F$ wobei der Fermiimpuls $k_F = \frac{1}{L} (3\pi^2 N)^{1/3}$ ist.)

Wegen dieser Eigenschaften sind die Näherungen für S_ℓ gerechtfertigt.

Ergänzung: Die zeitliche Änderung des Impulses der Konfiguration $|T_{e5}\rangle$ für ein beliebiges Paarpotential $\Delta(z)$

Die durch Gl. (5.1) angegebene Impulsdichte von $|T_{e5}\rangle$ ändert sich mit der Zeit gemäß

$$\frac{d}{dt} \vec{P}_{e5} = \left\{ \frac{1}{2m} \sum_{\alpha=x,y,z} \vec{e}_{\alpha} \operatorname{div} [\psi_e^* \vec{\nabla}_{\alpha} \psi_e - \vec{\nabla}_{\alpha} \psi_e^* \psi_e - \psi_e \vec{\nabla}_{\alpha} \psi_e^* + \vec{\nabla}_{\alpha} \psi_e \psi_e^*] \right. \\ \left. + i2 \vec{\nabla} \operatorname{Im} [\Delta(z) \psi_e^* \psi_e] - 2 \operatorname{Re} [\psi_e^* \psi_e \vec{\nabla} \Delta(z)] (1 - \omega_e) + \frac{d}{dt} \vec{\nabla} S_e n \right\}.$$

Die Zeitableitung des dritten Terms in Gl. (5.1), der die Impulsdichte des Gleichgewichtszustandes darstellt, ist per definitionem gleich Null; $\bar{n} = \sum_n [|\psi_n|^2 \omega_n + |\psi_n|^2 (1 - \omega_n)] - |\psi_e|^2$ ist die Elektronendichte (in der der Zustand $(l5)$ nicht mitgezählt wird); $\vec{e}_{\alpha}$ ist ein Einheitsvektor in Richtung α .

Die Integration über die Koordinaten der Quasiteilchen-Anregung $(l5)$ ergibt die Kraft

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{P} = \int \frac{d}{dt} \vec{P}_{e5} d\tau_e = \left\{ \frac{1}{2m} \sum_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \int_{\partial V} [\psi_e^* \vec{\nabla}_{\alpha} \psi_e - \vec{\nabla}_{\alpha} \psi_e^* \psi_e - \psi_e \vec{\nabla}_{\alpha} \psi_e^* + \vec{\nabla}_{\alpha} \psi_e \psi_e^*] \right. \\ \left. + i2 \int \vec{\nabla} \operatorname{Im} [\Delta(z) \psi_e^* \psi_e] d\tau_e - \vec{e}_z 2 \operatorname{Re} [\psi_e^* \psi_e \nabla_z \Delta(z)] d\tau_e \right\} (1 - \omega_e) \\ + \frac{d}{dt} \int \vec{\nabla} S_e \bar{n} d\tau_e.$$

Das Oberflächenintegral $\int_{\partial V} d\vec{\sigma}$ erstreckt sich über die Grenzen des Integrationsvolumens.

Wegen der Translationsinvarianz des Systems parallel zur Phasengrenze kann die Quasiteilchen-Bewegung in dieser Richtung durch ebene Wellen, $\begin{pmatrix} \psi \\ \psi \end{pmatrix} \sim e^{i(k_x x + k_y y)}$, beschrieben werden. Daher ist

$$\vec{\nabla} [\Delta(z) \psi_e^* \psi_e] = \vec{e}_z \nabla_z [\Delta(z) \psi_e^* \psi_e]$$

und

$$\int \vec{\nabla} [\Delta(z) \psi_e^* \psi_e] d\tau_e = \vec{e}_z A \int_{-L_z}^{+L_z} [\Delta(z) \psi_e^* \psi_e] dz = 0.$$

Dabei bezeichnet A die Oberfläche der bei $z=0$ beginnenden Phasengrenze, s. Fig. 2, und $\pm L_z$ sind die Begrenzungen der Probe in z -Richtung. An beiden Grenzen verschwindet das Integral, weil im normalen Gebiet bei $z=-L_z$ $\Delta(z)=0$ ist und tief im supraleitenden Gebiet bei $z=+L_z$ und konstantem $\Delta(z)=\Delta$ $\Psi_e^* f_e$ für $E < \Delta$ auf Null abgeklungen ist und für $E > \Delta$ $\text{Im}[\Delta \Psi_e^* f_e]$ verschwindet.

Die ebenen Wellen parallel zur Phasengrenze sollen periodische Randbedingungen an den Grenzen des Integrationsvolumens erfüllen, und in z -Richtung sollen sich f_e und Ψ_e über ein sehr großes, aber endliches Gebiet erstrecken und bei $z=\pm L_z$ auf Null abgefallen sein. Dann verschwindet auch das Oberflächenintegral. Übrig bleibt

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = - \int \left\{ \vec{e}_z 2 \text{Re} \Psi_e^* f_e \nabla_z \Delta(z) (1-w_e) - \frac{d}{dt} \nabla S_e \vec{n} \right\} d\tau_e = \vec{F}.$$

Der erste Term in $\vec{F}$ entspricht dem üblichen quantenmechanischen Ausdruck für die Kraft von einem Potential auf ein Teilchen.

Nach der aus der Kontinuitätsbedingung folgenden Gl. (2.17) ist

$$\text{div} \nabla S_e \vec{n} = 4m \text{Im} [\Delta(z) \Psi_e^* f_e] (1-w_e).$$

Weil die rechte Seite nur von z abhängt, genügt zur Ladungserhaltung der Suprastrom in z -Richtung

$$\nabla_z S_e \vec{n} = 4m (1-w_e) \int_0^z dz' \text{Im} [\Delta(z') \Psi_e^* f_e],$$

der nur für $z > 0$ existiert.

Dessen zeitliche Änderung ergibt sich mit den Quasiteilchen-Gln. (4.2) als

$$\frac{d}{dt} \nabla_z S_e \vec{n} = 4m \text{Re} \int_0^z \Delta(z') \left\{ \frac{1}{2m} [\dot{f}_e^* \nabla^2 \Psi_e^* + \Psi_e^* \nabla^2 \dot{f}_e] + 2E_F \Psi_e^* \dot{f}_e + \Delta(z') [|\dot{f}_e|^2 - |\Psi_e|^2] \right\} dz'.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \vec{F} = \vec{e}_z F_z = \vec{e}_z (1-w_e) 2 \text{Re} \left\{ - \int \Psi_e^* f_e \nabla_z \Delta(z) d\tau_e + \right. \\ \left. + 2m \int \int_0^z \Delta(z') \left[\frac{1}{2m} (\dot{f}_e^* \nabla^2 \Psi_e^* + \Psi_e^* \nabla^2 \dot{f}_e) + 2E_F \Psi_e^* \dot{f}_e + \Delta(z') (|\dot{f}_e|^2 - |\Psi_e|^2) \right] dz' d\tau_e \right\}. \end{aligned}$$

Über die Größe der Kraft in dieser Form läßt sich wenig aussagen. Die Vermutung liegt natürlich nahe, daß der zweite Term auf der rechten Seite die Reaktionskraft zu der durch den ersten Term gegebenen Kraft von dem Paarpotential auf das Quasiteilchen ist.

Durch Zusammenfassung der Gln. (2.10) und (2.17) können wir die Divergenz der Suprastromdichte auch als

$$\operatorname{div} \vec{\nabla} S_e \bar{n} = \left\{ -m \frac{\partial}{\partial t} [|\psi_e|^2 - |\varphi_e|^2] - \operatorname{Re} \operatorname{div} [\psi_e^* \vec{\nabla} \psi_e - \varphi_e^* \vec{\nabla} \varphi_e] \right\} (1 - w_e)$$

schreiben. Die Integration liefert die relevante z-Komponente

$$\nabla_z S_e \bar{n} = \left\{ -m \int_0^z dz' \frac{\partial}{\partial t} [|\psi_e|^2 - |\varphi_e|^2] - \operatorname{Re} [\psi_e^* \vec{\nabla}_z \psi_e - \varphi_e^* \vec{\nabla}_z \varphi_e] \right\} (1 - w_e),$$

deren Zeitableitung

$$\frac{d}{dt} \nabla_z S_e \bar{n} = \left\{ -m \int_0^z dz' \frac{\partial^2}{\partial t^2} [|\psi_e|^2 - |\varphi_e|^2] + 2 \operatorname{Re} \varphi_e^* \psi_e \nabla_z \Delta(z) - \frac{1}{2m} \operatorname{div} \operatorname{Re} [\psi_e^* \vec{\nabla}_z \psi_e - \vec{\nabla}_z \psi_e^* \psi_e - \varphi_e^* \vec{\nabla}_z \varphi_e + \vec{\nabla}_z \varphi_e^* \varphi_e] \right\} (1 - w_e)$$

die Kraftdichte auf das Quasiteilchen mit entgegengesetztem Vorzeichen enthält. In $\frac{d}{dt} \vec{P}$ heben sich die zu $\nabla_z \Delta(z)$ proportionalen Terme heraus, das in ein Oberflächenintegral überführte Integral über die Divergenz ist wieder gleich Null, und übrig bleibt

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{P} = -\vec{e}_z m \int_0^z dz' \frac{\partial^2}{\partial t^2} [|\psi_e|^2 - |\varphi_e|^2].$$

Diesen Ausdruck können wir auch unmittelbar aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_e + \operatorname{div} \vec{j}_e = 0$$

herleiten; dabei ist ρ_e durch Gl. (2.5) gegeben und $\vec{j}_e$ durch Gl. (2.6). Die zeitlichen und räumlichen Änderungen der von der Gleichgewichtskonfiguration herrührenden Anteile ist Null, so daß

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_e = -e \frac{\partial}{\partial t} [|\psi_e|^2 - |\varphi_e|^2]$$

und

$$\operatorname{div} \vec{j}_e = \frac{e}{m} \operatorname{div} [\vec{P}_N + \vec{P}_S]$$

ist, wobei $\vec{P}_N$ die Impulsdichte des Quasiteilchens und $\vec{P}_S = \vec{\nabla} S_e \bar{n}$ die des Suprastroms ist. Die zeitliche Änderung der für die endliche Divergenz verantwortlichen z-Komponente ergibt sich also durch Differentiation der Kontinuitätsgleichung nach t

und Integration bis z zu

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_{Nz} + \vec{P}_{Sz}) = -m \int_0^z \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho dz' = -m \int_0^z \frac{\partial^2}{\partial t^2} [|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2] dz',$$

was bei Integration über $d\tau_1$ mit $F = F_z$ identisch wird.

Im stationären Zustand, den wir uns im Gebiet $z > 0$ durch entsprechend große Ausdehnung der Wellen beliebig gut annähern können, ist $\frac{\partial^2}{\partial t^2} [|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2] = 0$ und damit $\frac{d}{dt} \vec{P} = 0$.

Im nicht-stationären Fall wird der endliche Impulsverlust $\frac{d}{dt} P_z$ durch die sich mit sehr großer Geschwindigkeit ausbreitende lokalisierte Schwankung der Ladungsdichte, ^{u.h.} vom induzierten Suprastrom, aus der Probe heraustransportiert. Die Probe muß man sich am supraleitenden Ende grundsätzlich als offen und mit einem großen Teilchenreservoir verbunden denken. Zur Zeit t_1 dringt also z. B. ein gut lokalisiertes Elektron mit dem z -Impuls $k_F + q$ in den Supraleiter ein, wird in den Grundzustand gestreut und regt dabei ein Loch an, das zur Zeit t_3 den Supraleiter mit dem z -Impuls $k_F - q$ verlassen hat. Der Impulsverlust $\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2q}{t_3 - t_1}$ ist von dem während der Zeit $t_1 < t < t_3$ fließenden Suprastrom aus der Probe heraustransportiert worden.

Wir stellen also fest:

- 1) Eine Kraft parallel zur Phasengrenze tritt nicht auf; das ist das wesentliche Ergebnis, das unsere Suche nach einem Mechanismus der Impulsübertragung von einer wandernden Wirbellinie ans Gitter fürs erste negativ enden läßt.
- 2) Die Vermutung, nach der die Reaktionskraft zur Kraft auf das Quasiteilchen den Suprastrom treibt, erscheint als bestätigt.

6. Schlußbetrachtung

Wir haben festgestellt, daß beim Zerfall eines Quasiteilchens und dem damit verbundenen Übergang eines Normalstroms in einem Suprastrom kein Impuls verlorenggeht. Folglich haben wir den Mechanismus der Impulsübertragung von der wandernden Wirbellinie auf das Gitter noch nicht gefunden. - Das wird im nächsten Kapitel geschehen. - Aber wir haben ein besseres Verständnis der tief liegenden Anregungen in einem Metall gewonnen, in dem eine ebene Phasengrenze ein normales von einem supraleitenden Gebiet trennt. Die ladungserhaltenden angeregten Zustände mit Anregungsenergien $E < \Delta$ haben die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sie im normalen Gebiet durch angeregte Quasiteilchen, im supraleitenden Gebiet aber durch die Kollektivanregung eines Suprastroms dargestellt werden. Dieser Suprastrom wird in den Quasiteilchen-Gleichungen durch eine Phasenverschiebung 2φ in der Phase des Paarpotentials $\Delta(x)$ widergespiegelt, in dessen Feld sich das Quasiteilchen mit den Quantenzahlen $(\ell\tau)$ bewegt.

II. Impulsverlust durch Paarbrechungsprozesse im kritischen Strom um einen Wirbelkern

Im I. Kapitel hatten wir alle Effekte vernachlässigt, die von dem an einer Phasengrenze auftretenden Magnetfeld herühren. Dadurch blieben die abschirmenden Supraströme parallel zur Phasengrenze unberücksichtigt, die in der Gegend abfallenden Paarpotentials so groß werden, daß in ihnen Grundzustands-Paare aufbrechen. Die dabei freigesetzten normalen Elektronen können ihren Impuls an das Gitter

abgeben. Bardeen hat darauf hingewiesen²⁰⁾, daß so die in der Einleitung erwähnte Lorentzkraft von der wandernden Wirbellinie auf das Gitter übertragen werden kann. Wir folgen in diesem Kapitel Bardeens Ausführungen und zeigen, wie die gesuchte Lorentzkraft im Modell von Bardeen und Stephen⁴⁾ aus den Paarbrechungsprozessen folgt.

Paarbrechungsprozesse in einem kritischen Strom und die damit verbundene Änderung des Paarpotentials sind zuerst von Rogers¹⁹⁾ in einem lokalen Modell untersucht worden, das die Grundlage für die Bardeen-Stephensche Beschreibung der Wirbelbewegung in einem Supraleiter II. Art⁴⁾ bildet.

Mit der aus der freien Systemenergie F berechneten Geschwindigkeit eines Grundzustandspaares²¹⁾,

$$\vec{v}_s = \frac{\partial F}{\partial \vec{p}} \quad (1)$$

ergibt sich die Dichte des supraflüssigen Massenstroms im Zweiflüssigkeitsmodell als

$$\vec{J}_s = n_s \vec{v}_s \quad (2)$$

dabei ist

$$\vec{p} = \vec{p}_s - \frac{e}{c} \vec{A} \quad (3)$$

der kinetische Impuls eines Elektrons im Kondensat und n_s ist die Dichte der Supraflüssigkeit, wenn das Kondensat ruht. Wegen dieser Definitionen können wir die Elektronen so behandeln, als ob sich nur ihre Geschwindigkeit $\vec{v}_s$, nicht aber ihre Dichte n_s mit dem Strom $\vec{J}_s$ oder dem kinetischen Impuls $\vec{p}$ ändert.

Wenn sich ein Elektron mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_s$ in den elektrischen und magnetischen Feldern $\vec{E}$ und $\vec{H}$ bewegt und einen Gradienten des chemischen Potentials μ spürt, dann ist sein Impulsgewinn pro Zeiteinheit

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = -\vec{\nabla} \mu + e \left[\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v}_s \times \vec{H} \right] \equiv \vec{f} \quad (4)$$

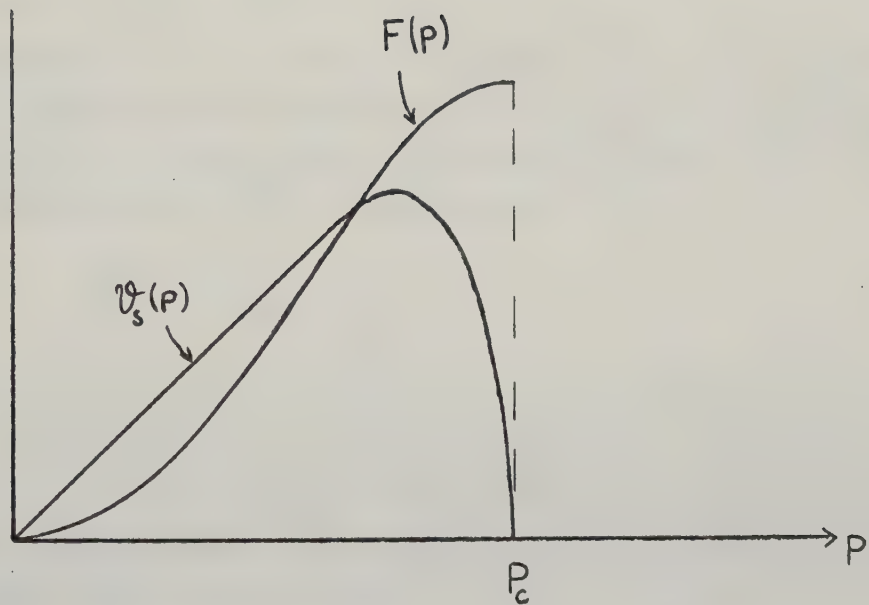


Fig. 6: Die Änderung der freien Energie $F(p)$ und der Geschwindigkeit $v_s(p) = \partial F / \partial p$ in der lokalen Theorie; $2p$ ist der Impuls eines Elektronenpaares im Grundzustand, und p_c ist der kritische Impuls für totale Entpaarung (= Paarbrechung); nach Bardeen und Stephen⁴⁾.

Falls zusätzlich noch Reibungskräfte auf das Elektron wirken, wird seine Geschwindigkeit $\vec{v}_s$ nicht proportional zu $\vec{P}$ sondern schwächer anwachsen, weil zumindest ein Teil des in den Feldern gewonnenen Impulses an die Reibungsquelle abgegeben wird. In einem Kristall kommt die Reibung vom Gitter der positiven Ionen, das zumindest durch die Nullpunktschwingungen immer zeitlich gestört ist. Ein Elektron mit der Masse m gibt pro Zeiteinheit den Impuls

$$\frac{d}{dt}(\vec{P} - m\vec{v}_s) = \vec{f}_L \quad (5)$$

an das Gitter ab, und der gesamte, von allen Elektronen herrührende Impulsverlust und damit die Kraft, die alle Elektronen zusammen auf das Gitter ausüben, ist, über alle Volumenelemente $d\tau$ integriert,

$$\vec{F}_L = \int d\tau n f_L \quad (6)$$

Wir setzen in Gl. (6) die temperaturunabhängige Gesamtdichte n aller Elektronen ein und nicht $n_s(\tau)$, weil alle Anregungen - seien sie nun thermisch erzeugt oder durch Paarbrechungsprozesse - den Impuls, den sie im Feld aufnehmen, an das Gitter weitergeben.

Die totale Zeitableitung von $\vec{v}_s$ ist

$$\frac{d}{dt} \vec{v}_s = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_s + (\vec{v}_s \cdot \nabla) \vec{v}_s \quad (7)$$

und kann mit der Identität

$$\frac{d}{dt} m\vec{v}_s \equiv \frac{d}{dt} \vec{P} - \frac{d}{dt} (\vec{P} - m\vec{v}_s) = \vec{f} - \vec{f}_L \quad (8)$$

als

$$\vec{f} - \vec{f}_L = \frac{\partial}{\partial t} m\vec{v}_s + (\vec{v}_s \cdot \nabla) m\vec{v}_s \quad (9)$$

geschrieben werden. Wir definieren die Tensordivergenz

$$\vec{\nabla} \cdot m\mathbf{S} = n_x \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (v_{si} m v_{s1}) + n_y \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (v_{si} m v_{s2}) + n_z \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (v_{si} m v_{s3}) \quad (10)$$

wobei die drei Achsen eines kartesischen Koordinatensystems $x_1, x_2, x_3 = x, y, z$ sind und v_{si} die Komponente von $\vec{v}_s$ in Richtung der Achse x_i ist. Da

$$(\vec{v}_s \nabla) m \vec{v}_s = \frac{m}{2} \nabla v_s^2 - m \vec{v}_s \times [\nabla \times \vec{v}_s] = -m \vec{v}_s \operatorname{div} \vec{v}_s + \overrightarrow{\operatorname{Div}} m S$$

ist, wird Gl. (9) zu

$$\vec{f} - \vec{f}_L = \frac{\partial}{\partial t} m \vec{v}_s - m \vec{v}_s \operatorname{div} \vec{v}_s + \overrightarrow{\operatorname{Div}} m S. \quad (11)$$

Auf ähnliche Weise wird

$$\vec{f} = \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{p} + (\vec{v}_s \nabla) \vec{p}$$

mit

$$\overrightarrow{\operatorname{Div}} T \equiv n_x \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (v_{si} p_i) + n_y \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (v_{si} p_2) + n_z \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (v_{si} p_3) \quad (12)$$

und p_k als dem kinetischen Impuls in Richtung der Achse x_k zu

$$\vec{f} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{p} - \vec{p} \operatorname{div} \vec{v}_s + \overrightarrow{\operatorname{Div}} T. \quad (13)$$

Subtraktion der Gl. (13) von Gl. (11) ergibt

$$-\vec{f}_L = \frac{\partial}{\partial t} (m \vec{v}_s - \vec{p}) - (m \vec{v}_s - \vec{p}) \operatorname{div} \vec{v}_s + \overrightarrow{\operatorname{Div}} (m S - T), \quad (14)$$

wobei in expliziter Schreibweise

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{Div}} (m S - T) = \\ = n_x \operatorname{div} \vec{v}_s (m v_{sx} - p_x) + n_y \operatorname{div} \vec{v}_s (m v_{sy} - p_y) + n_z \operatorname{div} \vec{v}_s (m v_{sz} - p_z) \end{aligned} \quad (15)$$

ist. Gl. (14) in Gl. (6) eingesetzt ergibt als Kraft von den Elektronen auf das Kristallgitter im stationären Zustand, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$,

$$\vec{F}_L = -n \int \overrightarrow{\operatorname{Div}} (m S - T) d\tau + n \int (m \vec{v}_s - \vec{p}) \operatorname{div} \vec{v}_s d\tau. \quad (16)$$

Aus Gl. (16) berechnen wir die Kraft, die eine einzelne Wirbellinie auf das Gitter ausübt, wenn Impuls der Supraflüssigkeit in der Entpaarungszone am Rande des Wirbelkerns verloren geht.

Wir nehmen an, daß ein Supraleiter II. Art sich in einem Magnetfeld $H_{c1} \leq H \ll H_{c2}$ befindet. Dann ist die Wirbel-dichte so gering, daß wir die Wirbel als voneinander unab-hängig ansehen können. Bardeen und Stephen⁴⁾ haben die supraflüssige Geschwindigkeit $\vec{v}_s$ außerhalb eines normalen Wirbelkerns vom Radius a berechnet, wenn ein Transportstrom mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_T$ in x-Richtung senkrecht zur Wirbelachse fließt. Der Impuls eines Elektrons im Transpor-tstrom wird als viel kleiner angenommen als der Impuls eines Elektrons im kreisenden Suprastrom. Letzterer ist

$$\vec{p}_0(r) = m_\varphi \left[-\frac{\hbar}{2r} + \frac{e}{2c} r H \right] \quad (17)$$

(Wir benutzen Zylinder-Koordinaten r, φ, z deren z-Achse durch das Zentrum des Wirbelkerns geht. H ist das Magnet-feld im Wirbelkern in -z-Richtung; e ist positiv.)

Die zu $\vec{p}_0$ gehörige Geschwindigkeit der Supraflüssig-keit, $m_\varphi v_0(p_0)$, geht nahe der Kerngrenze von negativen Werten aus gegen Null. Die Kerngrenze ist im lokalen Mo-dell als der Radius $r = a$ definiert, bei dem der Impuls $p_0(r)$ seinen kritischen Wert p_c annimmt. Die Fig. 6 zeigt, daß für Impulse $p > p_c$ das Kondensat verschwindet und die supraflüssige Geschwindigkeit $v_s = 0$ wird.

Die Geschwindigkeit $\vec{v}_s$ der Supraflüssigkeit entnehmen wir der Theorie von Bardeen und Stephen⁴⁾, nach deren Gln. (3.18) und (4.13) bei verschwindender Rückflußgeschwin-digkeit v_B

$$\vec{v}_s = m_r v_{sr} + m_\varphi v_{s\varphi} \quad (18)$$

$$v_{sr} = v_T \cos \varphi \, g(r) \quad , \quad g(r) \equiv \left\{ 1 - \frac{2a^2}{\hbar(1+ba^2)} \frac{p_0}{r} \left(1 - m \frac{v_c}{p_0} \right) \right\} \Theta(r-a)$$

$$v_{s\varphi} = -v_T \sin \varphi \, f(r) + v_0(p_0) \quad , \quad f(r) \equiv \left\{ 1 - \frac{2a^2}{\hbar(1+ba^2)} \frac{\partial p_0}{\partial r} \left(1 - m \frac{\partial v_c}{\partial p_0} \right) \right\} \Theta(r-a)$$

ist;

$$\Theta(r-a) = \begin{cases} 1 & \text{für } r \geq 0 \\ 0 & \text{für } r < 0 \end{cases} \quad , \quad b \equiv \frac{eH}{\hbar c} \quad .$$

Die äußere Grenze der Entpaarungszone definieren wir durch den Radius r_0 derartig, daß $m\vec{v}_s = \vec{p}$ für $r \geq r_0$.

Wenn kein Strom entlang der z-Achse fließt, wird Gl. (16) mit L_z als der Länge der Wirbellinie zu

$$\begin{aligned} \vec{F}_L = & -nL_z \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0} \left\{ n_x \operatorname{div} [\vec{v}_s (m v_{sx} - p_x)] + n_y \operatorname{div} [\vec{v}_s (m v_{sy} - p_y)] \right\} r dr \\ & + nL_z \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0} r dr (m\vec{v}_s - \vec{p}) \operatorname{div} \vec{v}_s. \end{aligned} \quad (19)$$

Wenn $\vec{v}_s$ samt Ableitung stetig wäre, könnten wir das erste Volumenintegral in ein Integral über die Oberfläche eines Zylinders vom Radius r_0 umformen und dabei sofort sehen, daß es Null ist. Aber wegen der Unstetigkeit von $\vec{v}_s$ bei $r = a$ müssen wir die Volumenintegration durchführen. Da Geschwindigkeit und Impuls des Transportstroms viel kleiner als v_0 und p_0 sind, setzen wir näherungsweise

$$m v_{sx} - p_x \approx m v_{0x} - p_{0x} = -\sin\varphi (m v_0 - p_0),$$

$$m v_{sy} - p_y \approx m v_{0y} - p_{0y} = \cos\varphi (m v_0 - p_0),$$

so daß wir erhalten

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v}_s (m v_{sx} - p_x) = & -v_r \cos\varphi \sin\varphi \left[\frac{\partial}{\partial r} g(r) (m v_0 - p_0) + \frac{1}{r} g(r) (m v_0 - p_0) \right] + \\ & + \frac{1}{r} v_r \sin 2\varphi \cdot f(r) (m v_0 - p_0) - v_0 (m v_0 - p_0) \cos\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v}_s (m v_{sy} - p_y) = & v_r \cos^2\varphi \left[\frac{\partial}{\partial r} g(r) (m v_0 - p_0) + \frac{1}{r} g(r) (m v_0 - p_0) \right] + \\ & + \frac{1}{r} v_r \cos 2\varphi \cdot f(r) (m v_0 - p_0) - v_0 (m v_0 - p_0) \sin\varphi. \end{aligned}$$

Damit wird das erste Integral in Gl. (19) nach der Integration über φ zu

$$v_T \pi \int_0^{r_0} \left[\frac{\partial}{\partial r} g(r) (m v_0 - p_0) + \frac{1}{r} g(r) (m v_0 - p_0) \right] r dr$$

$$\stackrel{\text{p.f.}}{=} v_T \pi \left[g(r) (m v_0 - p_0) r \right]_0^{r_0} = 0 ,$$

weil $m v_0 = p_0$ für $r = r_0$ ist. Daher bleibt nur das zweite Integral in Gl. (19) übrig. Aus Gl. (18) berechnen wir

$$\text{div } \vec{v}_s = v_T \cos \varphi \left\{ \frac{\partial g(r)}{\partial r} + \frac{1}{r} [g(r) - f(r)] \right\} ,$$

$$\frac{\partial g(r)}{\partial r} = - \frac{2a^2}{t(1+ba^2)} \left[\frac{t}{r^3} - m \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_0}{r} \right] \Theta(r-a) + \left\{ 1 - \frac{2a^2}{t(1+ba^2)} \frac{p_0}{r} \left(1 - m \frac{v_0}{p_0} \right) \right\} \delta(r-a) ,$$

$$\frac{1}{r} [g(r) - f(r)] = + \frac{2a^2}{t(1+ba^2)} \left[\frac{t}{r^3} - m \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial r} + m \frac{v_0}{r^2} \right] \Theta(r-a) .$$

Die beiden zu $\Theta(r-a)$ proportionalen Terme heben sich heraus, so daß

$$\text{div } \vec{v}_s = v_T \cos \varphi \cdot \left\{ 1 - \frac{2a^2}{t(1+ba^2)} \frac{p_0}{r} \left(1 - m \frac{v_0}{p_0} \right) \right\} \delta(r-a) \quad (20)$$

übrig bleibt. Wir machen wieder die Näherung

$$m \vec{v}_s - \vec{p} \approx m \vec{v}_0 - \vec{p}_0 = (m_y \cos \varphi - m_x \sin \varphi) (m v_0 - p_0) , \quad (21)$$

setzen das Produkt der Gln. (20) und (21) in das verbliebene Integral der Gl. (19) ein, integrieren über φ und finden

$$\vec{F}_L = m_y n L_z \pi a v_T \left\{ 1 - \frac{2a^2}{t(1+ba^2)} \frac{p_0(a)}{a} \left(1 - m \frac{v_0(a)}{p_0(a)} \right) \right\} (m v_0(a) - p_0(a)) . \quad (22)$$

Da $v_0(a) = 0$ und $p_0(a) = -(t/2a) \left(1 - \frac{eH}{tc} a^2 \right) = -(t/2a) (1 - ba^2)$ ist, wird Gl. (22) zu

$$\vec{F}_L = m_y n L_z \pi a v_T \left\{ 1 + \frac{1 - ba^2}{1 + ba^2} \right\} \frac{t}{2a} (1 - ba^2) .$$

Weil das obere kritische Feld⁴⁾ $H_{c2} = \hbar c / (2e a^2) \gg H$ ist, können wir $\hbar \omega^2 = H / (2 H_{c2}) \ll 1$ vernachlässigen und erhalten

$$\vec{F}_L = m_y n L_z \frac{\hbar}{2} v_T. \quad (23)$$

Die Wirbellinie umschließt ein Quant

$$\vec{\Phi} = -m_z \frac{\hbar c}{2e}$$

des in -z-Richtung weisenden magnetischen Flusses. Der Transportstrom fließt in x-Richtung, so daß

$$\vec{v}_T \times \vec{\Phi} = m_y v_T \frac{\hbar c}{2e}.$$

Damit und mit Gl. (23) erhalten wir die auf die Längeneinheit bezogene Kraft von einem wandernden Wirbel auf das Gitter als

$$\frac{\vec{F}_L}{L_z} = \frac{m_e}{c} \vec{v}_T \times \vec{\Phi} = \vec{F}_{\text{latt}}. \quad (24)$$

Das entspricht genau der von Nozieres und Vinen⁵⁾ für $T=0, m_s = \hbar$ berechneten Kraft, auf die wir in der Einleitung hingewiesen hatten. Das lokale Modell eines Supraleiters II. Art von Bardeen und Stephen beschreibt also eine Kraft von einer wandernden Wirbellinie auf das Kristallgitter, die mit dem modellunabhängigen Ergebnis von Nozieres und Vinen übereinstimmt. Der Impuls wird von den normalen Elektronen an das Gitter abgegeben, die, abgesehen von den thermisch erzeugten, in der Entpaarungszone an der Kerngrenze entstehen.

III. Die Anregungsspektren der gebundenen Quasiteilchen im Zwischenzustand und im gemischten Zustand von Supraleitern I. und II. Art

1. Das Spektrum im stromführenden Zwischenzustand eines Supraleiters I. Art

Obwohl die Laminar-Struktur im Zwischenzustand eines Supraleiters I. Art²⁵⁾ sehr verschieden ist von der Wirbelstruktur im gemischten Zustand eines Supraleiters II. Art, gibt es bemerkenswerte Ähnlichkeiten in ihren Anregungsspektren, wie wir noch sehen werden. Und weil die Richtigkeit der von Caroli und Matricon²³⁾ aufgestellten und in der Einleitung zitierten Behauptung, Quasiteilchen-Zustände negativer Energie seien immer unphysikalisch, am leichtesten im Zwischenzustand geprüft werden kann, wollen wir dessen vollständiges Anregungsspektrum der gebundenen Zustände berechnen, wenn ein Strom parallel zur Phasengrenze fließt. Der tiefste Teil des Spektrums für $E \ll \Delta$ und verschwindenden Strom wurde bereits von Andreev²⁶⁾ angegeben.

Wir nehmen an, daß der extreme Supraleiter I. Art eine rechteckige Platte von sehr großen Dimensionen ist. Das Magnetfeld in z-Richtung soll so schwach sein, daß die Dicke $2a$ der normalen Gebiete viel kleiner ist als die der supraleitenden Gebiete. Dann sind die gebundenen Quasiteilchen-Anregungen in den verschiedenen normalen Gebieten voneinander isoliert, und ihr Energiespektrum kann gut durch das Spektrum eines Supraleiters mit einem einzigen normalen Streifen der Dicke $2a$ im Zentrum angenähert werden.

Wir nehmen an, daß sich der Betrag des Paarpotentials in z-Richtung ändert und durch einen eindimensionalen Potentialtopf angenähert werden kann. Den gleichförmigen Strom, der mit dem Impuls pro Elektron $\vec{q} = m_y \vec{q}$ parallel zur Phasengrenze in y-Richtung fließen soll, können wir durch die Phase $2qy$ des komplexen Paarpotentials beschreiben. (Wir erinnern uns daran, daß im ersten Kapitel

$\vec{\nabla} \delta_{\lambda}$ den Impuls pro Elektron im induzierten Strom darstellte.) Das Paarpotential ist also

$$\Delta(z) = |\Delta(z)| e^{i2\varphi} = \Delta[\theta(z-a) + \theta(-z-a)] e^{i2\varphi}, \quad \Delta \text{ reell.} \quad (1.1)$$

Im übrigen machen wir dieselben Näherungen wie im vierten Abschnitt des ersten Kapitels, transformieren die in Gl. (1.7) des ersten Kapitels definierten, hier mit einer Schlange versehenen Quasiteilchen-Funktionen gemäß

$$\tilde{f}(x) = f(r) e^{i\varphi} e^{-iEt}, \quad \tilde{\varphi}(x) = \varphi(r) e^{-i\varphi} e^{-iEt} \quad (1.2)$$

und erhalten aus den Gln. (1.22) die vereinfachten stationären Quasiteilchen-Gleichungen

$$E f(r) = \left\{ \frac{1}{2m} \left(\frac{\vec{\nabla}}{i} + \vec{q} \right)^2 - \epsilon_F \right\} f(r) + |\Delta(z)| \varphi(r), \quad (1.3a)$$

$$E \varphi(r) = - \left\{ \frac{1}{2m} \left(\frac{\vec{\nabla}}{i} - \vec{q} \right)^2 - \epsilon_F \right\} \varphi(r) + |\Delta(z)| f(r). \quad (1.3b)$$

Wir definieren

$$E_q \equiv E - \frac{k_y q}{m},$$

$$\Delta_q \equiv \sqrt{1 - \Delta^2 / E_q^2},$$

$$\epsilon_z \equiv \epsilon_F - \frac{1}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + q^2),$$

$$k_{\Delta}^{\pm} \equiv \left\{ 2m [\epsilon_z \pm \sqrt{E_q^2 - \Delta^2}] \right\}^{1/2}, \quad k_o^{\pm} \equiv \left\{ 2m [\epsilon_z \pm E_q] \right\}^{1/2}$$

und erhalten die Lösungen der Gln. (1.3) auf dieselbe Weise wie in Kapitel I, Abschnitt 4.

Im supraleitenden Gebiet $|z| > a$ ist

$$\begin{pmatrix} f(z > a) \\ \varphi(z > a) \end{pmatrix} = \left\{ C_1^z \left(\frac{\sqrt{1+\Delta_q}}{\sqrt{1-\Delta_q}} \right) e^{i k_{\Delta}^+ z} + C_2^z \left(\frac{\sqrt{1+\Delta_q}}{\sqrt{1-\Delta_q}} \right) e^{-i k_{\Delta}^+ z} + C_3^z \left(\frac{\sqrt{1-\Delta_q}}{\sqrt{1+\Delta_q}} \right) e^{i k_{\Delta}^- z} + C_4^z \left(\frac{\sqrt{1-\Delta_q}}{\sqrt{1+\Delta_q}} \right) e^{-i k_{\Delta}^- z} \right\} e^{i(k_x x + k_y y)},$$

wobei C^z die Integrationskonstanten in $z \gtrless +a$ sind, und im normalen Gebiet $|z| < a$ ist

$$\begin{pmatrix} \psi(z < a) \\ \psi(z > a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1(1) e^{ik_0^+ z} + d_2(1) e^{-ik_0^+ z} + d_3(0) e^{ik_0^- z} + d_4(0) e^{-ik_0^- z} \end{pmatrix} e^{i(k_x x + k_y y)}$$

Für die gebundenen Zustände mit $E_q < \Delta$ ist k_Δ^- komplex und kann wie in den Gln. (4.16) bis (4.18) des ersten Kapitels geschrieben werden. Wegen der Randbedingung, daß die Wellenfunktionen für $|z| \rightarrow \infty$ nicht unendlich werden dürfen, müssen wir

$$C_2^> = 0 = C_3^>, \quad C_1^< = 0 = C_4^<$$

setzen. Die Anschlußbedingungen für die Funktionen bei $z = \pm a$ liefern ein System von acht homogenen Gleichungen für die verbleibenden Konstanten. Das System hat nur dann nicht-triviale Lösungen, wenn die Koeffizientendeterminante gleich Null ist. Mit den Abkürzungen

$$A \equiv \sqrt{1+d_q} e^{ik_\Delta^+ a}, \quad B \equiv \sqrt{1-d_q} e^{ik_\Delta^+ a}, \quad D \equiv \sqrt{1-d_q} e^{-ik_\Delta^- a}, \quad G \equiv \sqrt{1+d_q} e^{-ik_\Delta^- a},$$

$$a \equiv e^{ik_0^+ a}, \quad b \equiv e^{-ik_0^+ a}, \quad d \equiv e^{+ik_0^- a}, \quad q \equiv e^{-ik_0^- a}$$

erhalten wir die folgende Determinante, die bereits auf eine maximale Anzahl von Null-Elementen umgeformt worden ist:

$$D_{\text{st}} = \begin{vmatrix} A(k_0^+ - k_\Delta^+) & 0 & 0 & D(k_0^+ + k_\Delta^+) & 0 & -2k_0^+ b & 0 & 0 \\ B(k_0^+ - k_\Delta^+) & 0 & 0 & G(k_0^+ + k_\Delta^+) & 0 & 0 & 0 & -2k_0^+ q \\ A(k_0^- + k_\Delta^-) & 0 & 0 & D(k_0^- - k_\Delta^-) & -2k_0^- a & 0 & 0 & 0 \\ B(k_0^- + k_\Delta^-) & 0 & 0 & G(k_0^- - k_\Delta^-) & 0 & 0 & -2k_0^- d & 0 \\ 0 & A(k_0^+ + k_\Delta^+) & D(k_0^+ - k_\Delta^+) & 0 & 0 & -2k_0^+ a & 0 & 0 \\ 0 & B(k_0^+ + k_\Delta^+) & G(k_0^+ - k_\Delta^+) & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_0^+ d \\ 0 & A(k_0^- - k_\Delta^-) & D(k_0^- + k_\Delta^-) & 0 & -2k_0^- b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B(k_0^- - k_\Delta^-) & G(k_0^- + k_\Delta^-) & 0 & 0 & 0 & -2k_0^- q & 0 \end{vmatrix}$$

Durch Entwicklung dieser Determinante nach Unterdeterminanten erhält man⁺)

$$\begin{aligned}
 \frac{D_{et}}{[4k_0^+ k_0^- e^{ia(k_0^+ - k_0^-)}]^2} = & -e^{i2a(k_0^+ - k_0^-)} \left[(1+d_q)(k_0^+ - k_A^+)(k_0^- + k_A^-) - (1-d_q)(k_0^+ + k_A^+)(k_0^- - k_A^-) \right]^2 \\
 & + e^{i2a(k_0^+ - k_0^-)} \left[(1-d_q)(k_0^+ + k_A^+)(k_0^- + k_A^-) - (1+d_q)(k_0^+ - k_A^+)(k_0^- - k_A^-) \right]^2 \\
 & + e^{-i2a(k_0^+ - k_0^-)} \left[(1+d_q)(k_0^+ + k_A^+)(k_0^- + k_A^-) - (1-d_q)(k_0^+ - k_A^+)(k_0^- - k_A^-) \right]^2 \\
 & - e^{-i2a(k_0^+ - k_0^-)} \left[(1+d_q)(k_0^+ - k_A^+)(k_0^- + k_A^-) - (1-d_q)(k_0^+ + k_A^+)(k_0^- - k_A^-) \right]^2 \\
 & + 2(1-d_q^2) \left[(k_0^+ - k_A^+)(k_0^- + k_A^-) - (k_0^+ + k_A^+)(k_0^- - k_A^-) \right] \left[(k_0^+ + k_A^+)(k_0^- + k_A^-) - (k_0^+ - k_A^+)(k_0^- - k_A^-) \right].
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

Für die überwiegende Mehrheit aller Zustände können wir annehmen, daß $\epsilon_z \gg \Delta$ ist und man entwickeln kann

$$k_0^\pm \approx k_\xi \pm \frac{mE_q}{k_\xi}, \quad k_A^\pm \approx k_\xi \pm i \frac{m\sqrt{\Delta^2 - E^2}}{k_\xi},$$

wobei

$$k_\xi \equiv \sqrt{2m\epsilon_z}$$

ist. Wir vernachlässigen alle Glieder, die kleiner sind als Δ/ϵ_z ⁺⁺⁾, setzen die Determinante gleich Null und ge-

+) Auf die ursprünglich falschen Vorzeichen vor dem zweiten und dritten Term, die in Gl. (1.5) statt des cotangens den tangens ergaben, hat mich Professor Bardeen²⁸⁾ dankenswerter Weise aufmerksam gemacht.

++) Wenn wir diese Näherung schon vor der etwas mühseligen Entwicklung der 8 x 8 Determinante machen, vereinfacht sich diese ganz erheblich, weil dann $k_0^+ \approx k_0^- \approx k_A^+ \approx k_A^-$ gesetzt werden kann und noch acht weitere Elemente Null werden. Als äquivalent zu dieser Näherung hat Bardeen²⁸⁾ die Anschlußbedingungen für die Quasiteilchen-Wellenfunktionen so formuliert, daß an der Stelle $z = a$ das Verhältnis der elektronartigen Komponente zur locharartigen in der Funktion mit C_1' gleich dem Verhältnis der zu d_1 und d_3 proportionalen Funktionen sein muß; für $z = -a$ gilt entsprechendes, nur daß statt der zu C_1 proportionalen die zu C_3' proportionale Funktion genommen wird.

winnen aus Gl. (1.4) die einfache Eigenwertgleichung

$$\operatorname{ctg} 2a \frac{mE_q}{k_F} = \frac{1}{\sqrt{\Delta^2/E_q^2 - 1}} = \frac{E_q}{\sqrt{\Delta^2 - E_q^2}} \quad (1.5)$$

Hierbei müssen wir beachten, daß unsere Wellenfunktionen die Quasiteilchen-Gleichungen für positive und negative E_q nur dann lösen, wenn wir für positive und negative E_q definieren, daß $\sqrt{E_q^2} \equiv E_q$ ist. Die Gl. (1.5) kann in die noch handlichere Form

$$\pm \frac{E_q}{\Delta} = \cos 2a \frac{mE_q}{k_F} \quad (1.6)$$

gebracht werden, wobei wir jedoch auf die Nebenbedingung achten müssen, daß $\operatorname{ctg} 2a mE_q/k_F \geq 0$ für $E_q \geq 0$ sein muß.

Im Grenzfall $q \rightarrow 0$ und $E_q/\Delta \rightarrow 0$ ist Gl. (1.6) identisch mit Andreevs Gl. (8)²⁶⁾, wenn wir den darin unbestimmt gebliebenen Energieparameter $E_0 = \frac{\pi}{2} k_F (2ma)$ ($= \frac{\pi}{2} v_F n_z/a$ in Andreevs Schreibweise) setzen.

Die Fig. 7 zeigt die als graphische Lösung der Gln. (1.6) bzw. (1.5) ermittelten Energieeigenwerte der gebundenen Zustände.

Die Anzahl der quantisierten Eigenwerte E_q und damit die Anzahl der gebundenen Zustände bei festem k_x und k_y hängt von der relativen Größe von $1/\Delta$ und $2am/k_F$ ab.

Wenn $2am/k_F < \pi/\Delta$ ist, gibt es nur eine physikalisch sinnvolle Lösung $E_q > 0$; wenn $2am/k_F > \pi/\Delta$ ist, gibt es mehrere physikalische Eigenwerte $E_q > 0$. Da $k_F \leq k_F = m v_F$, ist $\frac{2am}{k_F} \geq \frac{2a}{v_F} = \frac{1}{\pi \Delta} 2a/\xi_0$, wobei $\xi_0 = v_F/(\pi \Delta)$ die Kohärenzlänge und v_F die Fermigeschwindigkeit ist. Mehrere Energieeigenwerte treten mit Sicherheit also dann auf, wenn

$$\frac{2a}{\xi_0} > \pi^2$$

ist.

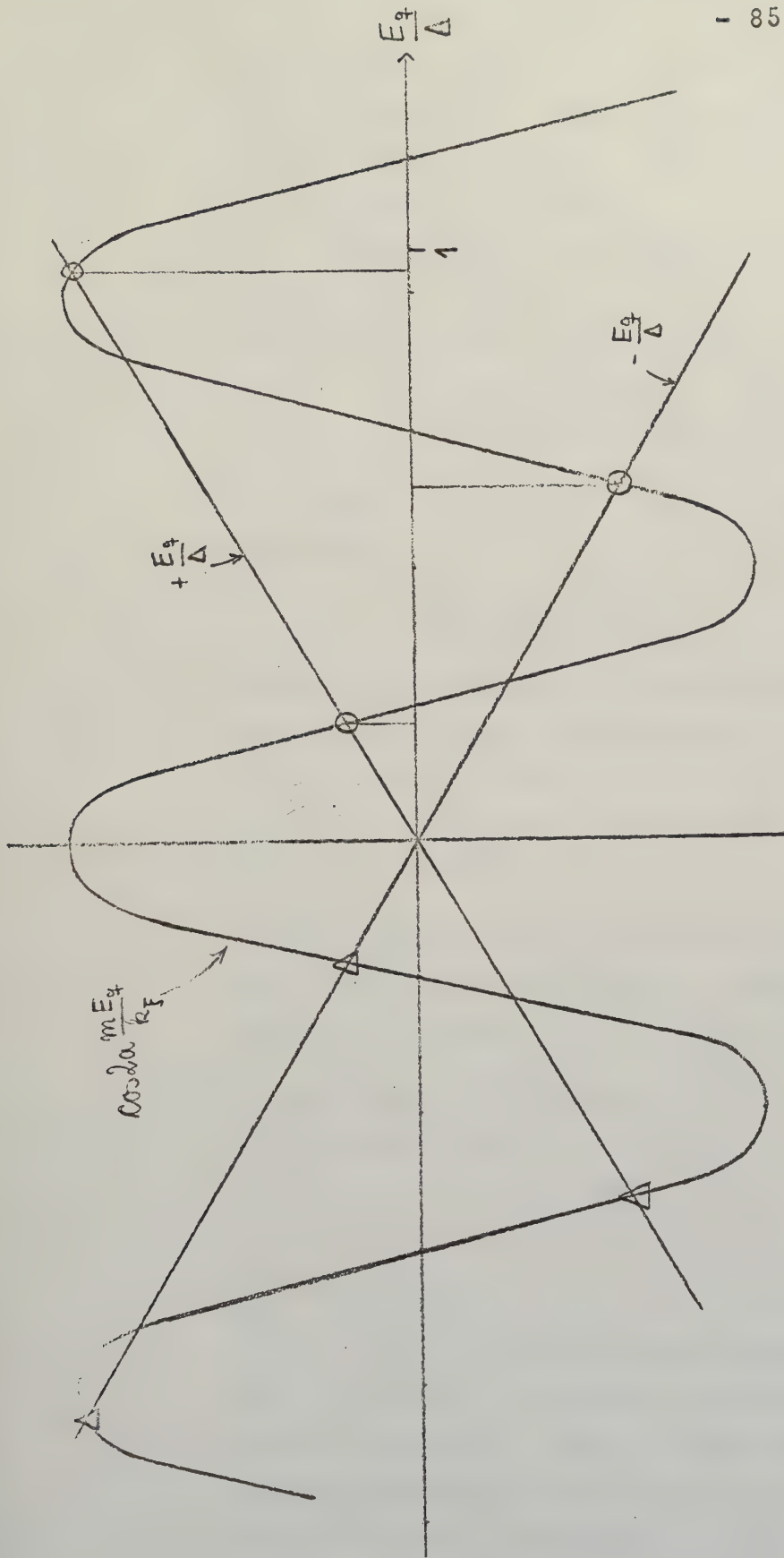


Fig. 7: Graphische Lösung der Eigenwertgleichung (1,6), wenn $2am/k_F \gg \pi/\Delta$ ist; Kreise bezeichnen gültige Schnitte, die physikalische Eigenwerte E_q * E_q angeben, Dreiecke bezeichnen gültige Schnitte, die zu unphysikalischen E_q gehören.

* siehe Diskussion auf S. D1 im Anschluß an S. 103

Die Lösungen $E_q < 0$ werden als unphysikalisch* aus-
geschieden, weil bei ihrer Berücksichtigung jeder Quanten-
zustand doppelt gezählt würde. Wir glauben aber nicht, daß
der niedrigste Eigenwert

$$E_q = E - \frac{k_y q}{m} = \gamma \frac{\pi}{2} \frac{k_x}{2am}, \quad 0 < \gamma < 1,$$

unphysikalisch ist, wenn aus ihm eine negative Energie

$$E = \gamma \frac{\pi}{2} \frac{k_x}{2am} - \frac{|k_y| |q|}{m} < 0 \quad (1.7)$$

für diejenigen k_y folgt, die q entgegengerichtet sind und
der Beziehung

$$|q| > \gamma \frac{\pi}{2} \frac{1}{2a} \left| \frac{k_x}{k_y} \right| \quad (1.8)$$

genügen. Für hinreichend große Weiten $2a \gg \xi_0$ der nor-
malen Gebiete kann die Beziehung (1.8) für die meisten k_y
erfüllt werden, ohne daß $|q|$ den kritischen Impuls⁴⁾
 $q_c = \frac{2,178}{2\pi \xi_0} = 1,089 \Delta / v_F$ überschreitet, bei dem die Supra-
leitung zusammenbricht.

Den Grund für die Annahme, daß die nach den Gln. (1.7)
und (1.8) negativen Energien E physikalisch zulässige Eigen-
werte darstellen, sehen wir in folgender Überlegung:

Wenn kein Strom parallel zu den Phasengrenzen im Zwi-
schenzustand fließt (abgesehen von vernachlässigten Ab-
schirmströmen) ist $E_{q=0} = E = \gamma \frac{\pi}{2} k_x / (2am)$ sicher ein physika-
lisch sinnvoller Energieeigenwert. Die Energie ist im Hin-
blick auf die Richtung des Quasiteilchen-Impulses entartet.
Wenn wir nun einen Strom parallel zu den Phasengrenzen
einschalten, der hinreichend homogen sein soll, um durch
einen räumlich konstanten Paarimpuls $M_y 2q$ beschrieben
werden zu können, wird für Impulse entlang der y -Achse
die Richtungsentartung der Energie aufgehoben und ähnlich
wie entartete Atom-Energieniveaus im Magnetfeld spaltet
der n -te Eigenwerte auf in $E_n^\pm = (2n+1) \gamma \frac{\pi}{2} k_x / (2am) \pm |k_y| |q| / m$
für k_y parallel zu q ; $n = 0, 1, 2 \dots$ (In erster

* siehe Diskussion auf S. D1 im Anschluß an S.103

Näherung kann man gemäß Fig. 7 γ als energieunabhängig ansehen.) Wir können nun nicht einsehen, warum beim Einschalten des Stromes plötzlich die Zustände mit antiparallelen k_y und q physikalisch sinnlos werden sollen, weil die Aufspaltung sie bis unter den Energienullpunkt absenkt. (Die meisten dieser Zustände werden zu $n = 0$ gehören, für die die Gln. (1.7) und (1.8) gelten, aber auch für höhere n können u.U. noch negative Energien auftreten.) Wenn wir sie ausschließen, würde das heißen, daß man durch Einschalten eines Stroms die Zahl der für die Elektronen vorhandenen Zustände verringern könnte - ein schwer vorstellbarer Vorgang -.

Man kann die verlorenen Zustände auch nicht bei den symmetrisch negativen E_q der Fig. 7 suchen, in denen für parallele k_y und q entsprechend viele Energiewerte positiv werden, die wir dann oben fälschlicherweise ausgeschlossen hätten. Abgesehen davon, daß der Quantenzustand $+|k_y|$ dann zweimal gezählt werden müßte, würde ein Beobachter, der das Quasiteilchen-Spektrum einmal im stromlosen System und dann mit dem Strome schwimmend mißt, in den beiden für ihn völlig gleichwertigen Systemen einmal das Fehlen und dann das Vorhandensein von Quasiteilchen mit negativen Energien feststellen und an der Galilei-Invarianz verzweifeln.

Wir halten also die für $E_q > 0$ auftretenden Zustände negativer Energie E für physikalisch sinnvoll. Sie entsprechen den Zuständen negativer Energie in einem normalen, stromführenden System, das durch deren Besetzung in den stromlosen Zustand zurückzukehren bestrebt ist.

2. Die gebundenen Zustände im Wirbelkern eines Supraleiters II. Art

Aus der Diskussion der Energie-Eigenwerte der gebundenen Quasiteilchen im Zwischenzustand eines Supraleiters I. Art

haben wir geschlossen, daß es physikalisch sinnvolle Quasiteilchen-Zustände negativer Energie gibt, wenn ein Strom parallel zu den Phasengrenzen fließt. Wir erwarten, ähnliche Zustände im Anregungsspektrum des gemischten Zustands eines Supraleiters II. Art zu finden, bei dem gebundene Quasiteilchen in den von kreisenden Supraströmen umgebenen Wirbelkernen auftreten.

Wie im II. Kapitel nehmen wir an, daß das in-z-Richtung weisende Magnetfeld H sehr viel kleiner als das obere kritische Feld H_{c2} und nur wenig größer als H_{c1} ist: $H_{c1} \lesssim H \ll H_{c2}$. Dann ist die Wirbeldichte gering, und es genügt, das Quasiteilchen-Spektrum einer isolierten Wirbellinie im Zentrum eines unendlich ausgedehnten supraleitenden Mediums zu diskutieren.

In den Quasiteilchen-Gleichungen (1.22) aus Kapitel I vernachlässigen wir wieder S_L und wählen in einem Zylinderkoordinatensystem (r, θ, z) für das Paarpotential die Form²²⁾

$$\Delta(x) = \Delta(r) e^{-i\theta}, \quad \Delta(r) \text{ reell,}$$

weil der Gradient der Winkelkoordinate θ genau auf den Paarimpuls $-m_0 \hbar / r$ im Suprastrom um ein magnetisches Flußquant $-m_2 \hbar c / 2e$ führt; siehe auch Gl. 17 in Kapitel II. Mit der in Kapitel I, Gl. (4.1) angegebenen Gelatine-Näherung für die skalaren Potentiale lauten die vereinfachten Quasiteilchen-Gleichungen (in Einheiten, für die $\hbar = 1$ ist):

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left\{ \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \epsilon_F \right\} \psi + \Delta(r) e^{-i\theta} \varphi \quad (2.1a)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi = - \left\{ \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \epsilon_F \right\} \varphi + \Delta(r) e^{i\theta} \psi \quad (2.1b)$$

Ein zweckmäßiger Ansatz zur Lösung der Gleichungen ist nach Caroli, de Gennes und Matricon²²⁾²³⁾

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(r) e^{-i\frac{\theta}{2}} \\ v(r) e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} e^{ik_z z} e^{im\theta} e^{-iEt},$$

wobei 2μ eine ungerade ganze Zahl sein muß, damit die Funktionen eindeutig bleiben, wenn sich θ um Vielfache von 2π ändert.

Aus den Gln. (2.1) werden die Gln. für u und v

$$E u(r) = \left\{ \frac{1}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{e}{c} \vec{A} + (\mu - \frac{1}{2}) \vec{\nabla} \theta + n_z k_z \right]^2 - E_F \right\} u(r) + \Delta(r) v(r) \quad (2.2a)$$

$$E v(r) = - \left\{ \frac{1}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{e}{c} \vec{A} + (\mu + \frac{1}{2}) \vec{\nabla} \theta + n_z k_z \right]^2 - E_F \right\} v(r) + \Delta(r) u(r). \quad (2.2b)$$

Ebenso wie Caroli et al.²²⁾ vernachlässigen wir den Einfluß des Vektorpotentials $\vec{A}$ auf Zustände, die nur innerhalb der Kohärenzlänge ξ_0 von der Wirbelachse, $r \leq \xi_0$, wichtig sind. Man kann das tun, weil

$$\frac{e}{c} |\vec{A}| \sim \frac{e}{c} H r, \quad \frac{|\vec{\nabla} \theta|}{2} \sim \frac{1}{2r} \quad \text{und also} \quad \frac{e}{c} |\vec{A}| / \frac{|\vec{\nabla} \theta|}{2} \sim \frac{H r^2}{\Phi} \leq \frac{H \xi_0^2}{\Phi} \sim \frac{H}{H_{c2}} \ll 1$$

ist. Außerdem wollen wir nur solche Zustände berücksichtigen, in denen der Impuls k_z entlang der Wirbelachse den Fermi-Impuls k_F nicht überschreitet, so daß wir

$$k_z = k_F \cos \beta, \quad 0 \leq \beta \leq \pi,$$

schreiben und

$$E_r \equiv E_F - \frac{k_z^2}{2m} = \frac{1}{2m} k_F^2 \sin^2 \beta \quad (2.3)$$

definieren können. Wenn wir noch die Abkürzung

$$p \equiv \mu - \frac{1}{2}$$

eingeführen, nehmen die Gln. (2.2) schließlich die Form an

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] + E_r + E - \frac{p^2}{2m r^2} \right\} u(r) - \Delta(r) v(r) = 0 \quad (2.4a)$$

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] + E_r - E - \frac{(p+1)^2}{2m r^2} \right\} v(r) + \Delta(r) u(r) = 0. \quad (2.4b)$$

Caroli et al.²²⁾²³⁾ haben diese Gleichungen für ein Paarpotential $\Delta(r)$ gelöst, das für $r \rightarrow 0$ verschwindet, linear mit kleinen r anwächst und für $r \gg \xi_0$ den BCS Wert $\Delta_{\max} = \Delta$ annimmt. Nur in dem Grenzfall $E \ll \Delta$ und $k_F \xi_0 \gg \mu$ erhalten die Autoren analytische Ausdrücke für die Energie-Eigenwerte und die Wellenfunktionen; die höheren Energiezustände werden numerisch berechnet. Sie finden negative Energie-Eigenwerte für $\mu < 0$, wenn Suprastrom und Quasiteilchen-Anregung im selben Drehsinn rotieren, und sie sehen diese Lösungen als unphysikalisch an.

Ein einfacheres, dafür aber auch nicht selbst konsistentes, stufenförmiges Paarpotential

$$\Delta(r) = \Delta \theta(r-a), \Delta \text{ konstant}, \theta(r-a) = \begin{cases} 1 & \text{für } r \geq a \approx \xi_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (2.5)$$

sollte uns trotz seiner Unvollkommenheiten in die Lage versetzen, ihre Ergebnisse zu überprüfen und ein qualitatives Bild des Energiespektrums der gebundenen Zustände zu gewinnen (vgl. Fig. 1).

Man kann das Potential (2.5) durch eine konforme Abbildung aus dem in Gl. (4.10), Kapitel I, angegebenen stufenförmigen Paarpotential an der ebenen Phasengrenze gewinnen. Das legt die Vermutung nahe, daß die Lösungen der Gln. (2.4) mit (2.5) analog zu den Wellenfunktionen in Kapitel I konstruiert sein müssen und das zylindersymmetrische Gegenstück zu ebenen Wellen, also Zylinderfunktionen, sind.

Tatsächlich stellen die Gln. (2.4) in der Gegend $r < a$ mit verschwindendem Paarpotential $\Delta(r) = 0$ Besselsche Differentialgleichungen dar, deren im Ursprung, $r = 0$, regulären Lösungen

$$\begin{pmatrix} u(r) \\ v(r) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} J_p(k_+ r) + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} J_{p+1}(k_- r) \quad (2.6)$$

sind. $J_p(z)$ ist eine Besselsche Funktion erster Art²⁷⁾

mit der ganzzahligen Ordnung p und dem Argument z ; a und b sind Integrationskonstanten, und

$$K_{\pm} = \sqrt{2m(\epsilon_{\pm} \pm E)}$$

kann als radiale Wellenzahl angesehen werden.

Weiterhin kann man leicht nachprüfen, daß in dem Gebiet $r > a$ die Hankelschen Funktionen²⁷⁾

$$\begin{pmatrix} u_{\pm} \\ \varphi_{\pm} \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\alpha} \\ \sqrt{1-\alpha} \end{pmatrix} H_m^{(1)}(k_{\pm} r) \quad \text{der Ordnung } m = \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{4}} \quad \text{mit}$$

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{E^2}}, \quad k_{\pm} = \sqrt{2m(\epsilon_{\pm} \pm \sqrt{E^2 - \Delta^2})} \quad (2.7)$$

die Gln. (2.4) erfüllen würden, wenn man den Term $\pm \frac{\mu}{2mr^2}$ vernachlässigen könnte, der vom Einfluß des kreisenden Suprastroms auf das Quasiteilchen herrührt. Aber gerade dieser Term ist wichtig und verlangt genauere Lösungen.

Darum machen wir den Ansatz

$$\begin{pmatrix} u_{+} \\ \varphi_{+} \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\alpha} g_{+}^{(1)} H_p^{(1)}(k_{+} r) \\ \sqrt{1-\alpha} g_{-}^{(1)} H_{p+1}^{(1)}(k_{+} r) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{-} \\ \varphi_{-} \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\alpha} h_{+}^{(1)} H_p^{(1)}(k_{-} r) \\ \sqrt{1+\alpha} h_{-}^{(1)} H_{p+1}^{(1)}(k_{-} r) \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

dessen Funktionen $g_{\pm}(r)$ und $h_{\pm}(r)$ durch gekoppelte Gleichungen bestimmt werden, die aus (2.4) folgen und mit

$$R \equiv \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$$

lauten (wir lassen die Indizes (1) fort, die die beiden Typen von Hankel-Funktionen kennzeichnen, weil die folgenden Gleichungen für beide Indizes gelten):

$$\frac{d^2}{dr^2} g_{+} + \left[\frac{1}{r} + \frac{2}{H_p(k_{+} r)} \frac{d}{dr} H_p(k_{+} r) \right] \frac{d}{dr} g_{+} + 2m\Delta R \left[g_{+} - \frac{H_{p+1}(k_{+} r)}{H_p(k_{+} r)} g_{-} \right] = 0 \quad (2.9a)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} g_- + \left[\frac{1}{r} + \frac{2}{H_{P+1}(k_+ r)} \frac{d}{dr} H_{P+1}(k_+ r) \right] \frac{d}{dr} g_- + 2m\Delta \frac{1}{R} \left[\frac{H_P(k_+ r)}{H_{P+1}(k_+ r)} g_+ - g_- \right] = 0 \quad (2.9b)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} h_+ + \left[\frac{1}{r} + \frac{2}{H_P(k_+ r)} \frac{d}{dr} H_P(k_+ r) \right] \frac{d}{dr} h_+ + 2m\Delta \frac{1}{R} \left[h_+ - \frac{H_{P+1}(k_+ r)}{H_P(k_+ r)} h_- \right] = 0 \quad (2.10a)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} h_- + \left[\frac{1}{r} + \frac{2}{H_{P+1}(k_- r)} \frac{d}{dr} H_{P+1}(k_- r) \right] \frac{d}{dr} h_- + 2m\Delta R \left[\frac{H_P(k_- r)}{H_{P+1}(k_- r)} h_+ - h_- \right] = 0 \quad (2.10b)$$

Für die gebundenen Zustände $E < \Delta$ hat k_+ aus Gl. (2.7) einen positiven Imaginärteil und k_- einen negativen, so daß nur $H_P^{(u)}(k_+ r)$ und $H_P^{(a)}(k_- r)$ für $r \rightarrow \infty$ begrenzt sind.²⁷⁾

Um die Gleichungen (2.9) und (2.10) analytisch lösen zu können, müssen wir uns auf kleine Quasiteilchen-Drehimpulse beschränken, für die

$$\mu^{-1/2} = p \ll |k_{\pm} a| \gg 1$$

ist. Dann können wir nämlich die asymptotischen Entwicklungen der Zylinderfunktionen für

$$p \ll |z| \gg 1$$

verwenden, die durch

$$J_p(z) \approx \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} \cos \left\{ z - \frac{\pi}{2} \left(p + \frac{1}{2} \right) + \frac{4p^2 - 1}{8z} \right\}, \quad (2.11)$$

$$H_P^{(u)}(z) = \frac{i}{\sin p\pi} \left[e^{-ip\pi} J_p(z) - J_{-p}(z) \right] \approx \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} \exp i \left\{ z - \frac{\pi}{2} \left(p + \frac{1}{2} \right) + \frac{4p^2 - 1}{8z} \right\}, \quad (2.12a)$$

$$H_P^{(a)}(z) = \frac{-i}{\sin p\pi} \left[e^{ip\pi} J_p(z) - J_{-p}(z) \right] \approx \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} \exp -i \left\{ z - \frac{\pi}{2} \left(p + \frac{1}{2} \right) + \frac{4p^2 - 1}{8z} \right\} \quad (2.12b)$$

gegeben sind. Die Entwicklungen (2.12) erlauben es uns, in den Gln. (2.9) und (2.10)

$$\frac{1}{r} + \frac{2}{H_p^{(1)}(k_+ r)} \frac{d}{dr} H_p^{(1)}(k_+ r) \approx i 2 k_+ \quad , \quad \frac{H_{p+1}^{(1)}(k_+ r)}{H_p^{(1)}(k_+ r)} \approx -i + \frac{\mu}{k_+ r} \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{r} + \frac{2}{H_p^{(2)}(k_- r)} \frac{d}{dr} H_p^{(2)}(k_- r) \approx -i 2 k_- \quad , \quad \frac{H_{p+1}^{(2)}(k_- r)}{H_p^{(2)}(k_- r)} \approx i + \frac{\mu}{k_- r}$$

zu setzen, so daß wir die Gleichungen

$$\frac{d^2}{dr^2} g_+ + i 2 k_+ \frac{d}{dr} g_+ + 2m\Delta R [g_+ + i g_-] = 2m\Delta R \frac{\mu}{k_+ r} g_- \quad (2.14a)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} g_- + i 2 k_- \frac{d}{dr} g_- + 2m\Delta \frac{1}{R} [i g_+ - g_-] = -2m\Delta \frac{1}{R} \frac{\mu}{k_- r} g_+ \quad (2.14b)$$

und

$$\frac{d^2}{dr^2} h_+ - i 2 k_+ \frac{d}{dr} h_+ + 2m\Delta \frac{1}{R} [h_+ - i h_-] = 2m\Delta \frac{1}{R} \frac{\mu}{k_+ r} h_- \quad (2.15a)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} h_- - i 2 k_- \frac{d}{dr} h_- - 2m\Delta R [i h_+ + h_-] = -2m\Delta R \frac{\mu}{k_- r} h_+ \quad (2.15b)$$

erhalten.

Weil die rechten Seiten der Gln. (2.14) und (2.15) proportional zu $\mu/(k_{\pm} r) \ll 1$ sind, können sie als kleine Störungen behandelt werden. Wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned} g_+(r) &= 1 + G_+(r) & h_+(r) &= 1 + H_+(r) \\ g_-(r) &= i + G_-(r) & h_-(r) &= -i + H_-(r) \end{aligned} \quad ,$$

wobei die mit Großbuchstaben geschriebenen Funktionsanteile wegen der kleinen rechten Seiten so klein sind, daß sie dort vernachlässigt werden können. Die Lösungen werden nach einem der Variation der Konstanten entsprechenden Verfahren berechnet und haben mit den Abkürzungen

$$Q(r) \equiv \mu R \frac{2m\Delta}{k_+ k_-} \int_r^\infty \sin k_-(r'-r) \frac{e^{ik_+(r'-r)}}{r'} dr' , \quad (2.16)$$

$$P(r) \equiv \mu R \frac{2m\Delta}{k_+ k_-} \int_r^\infty \sin k_+(r'-r) \frac{e^{-ik_2(r'-r)}}{r'} dr'$$

die Form

$$g_+^{(1)}(r) \approx 1 + iQ(r) \approx e^{iQ(r)} \quad h_+^{(2)} \approx 1 - i \frac{P(r)}{R^2} \approx e^{-i \frac{P(r)}{R^2}}$$

$$g_-^{(1)}(r) \approx i \left(1 + \frac{i}{R^2} Q(r)\right) \approx i e^{i \frac{Q(r)}{R^2}} \quad h_-^{(2)} \approx -i \left(1 - i P(r)\right) \approx -i e^{-i P(r)} .$$

Wir haben dabei die Beziehung $2m\Delta[R - 1/R] = k_-^2 - k_+^2$ benutzt.

Wenn $\epsilon_r \gg \sqrt{\Delta^2 - E^2}$ ist, können wir entwickeln

$$k_\pm \approx \sqrt{2m\epsilon_r} \pm i \frac{m\sqrt{\Delta^2 - E^2}}{\sqrt{2m\epsilon_r}} \equiv k_r \pm i \frac{\kappa}{2} ,$$

und wegen der Annahme $k_r r \gg 1$ können wir die asymptotischen Darstellungen von $Q(r)$ und $P(r)$ benutzen. Diese sind mit

$$Z(r) \equiv \mu R \frac{2m\Delta}{k_+ k_-} \frac{1}{2i} e^{\kappa r} \text{Ei}(-\kappa r) :$$

$$Q(r) \approx Z(r) + \frac{1}{4k_r} \mu R \frac{2m\Delta}{k_+ k_-} ,$$

$$P(r) \approx -Z(r) + \frac{1}{4k_r} \mu R \frac{2m\Delta}{k_+ k_-} ,$$

wobei

$$\text{Ei}(-\kappa r) = - \int_{\kappa r}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$$

auf den Seiten 1 - 8 der Referenz 27) nachgesehen werden kann. Mit

$$k_+ k_- \approx k_r^2 , \quad R^{\pm 1} = \frac{E}{\Delta} \mp i \sqrt{1 - \frac{E^2}{\Delta^2}} ,$$

$$b(r) \equiv \mu \frac{mE}{k_r^2} e^{\kappa r} \text{Ei}(-\kappa r) ,$$

(2.17)

$$\eta(r) \equiv \mu \sqrt{1 - \frac{E^2}{\Delta^2}} \frac{m\Delta}{k_r^2} e^{\kappa r} \text{Ei}(-\kappa r)$$

schreiben wir

$$Z(r) = -i b(r) - \eta(r) \quad ,$$

$$\frac{Z(r)}{R^2} = -i b(r) + \eta(r) \quad .$$

Der Term proportional zu $[4k_r]^{-1} \ll 1$ wird in $Q(r)$ und $P(r)$ vernachlässigt, so daß wir schließlich für die Gln. (2.14) und (2.15) die Näherungslösungen

$$\begin{pmatrix} q_+^{(n)}(r) \\ q_-^{(n)}(r) \end{pmatrix} \approx e^{b(r)} \begin{pmatrix} e^{-i\eta(r)} \\ i e^{i\eta(r)} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} h_+^{(n)}(r) \\ h_-^{(n)}(r) \end{pmatrix} \approx e^{b(r)} \begin{pmatrix} e^{i\eta(r)} \\ -i e^{-i\eta(r)} \end{pmatrix}$$

angeben können. Weil, wie sich herausstellen wird, immer $\mu E > 0$ ist, ist $b(r)$ aus Gl. (2.17) immer negativ.

Damit werden also die Wellenfunktionen der gebundenen Quasiteilchen mit $E < \Delta$ in dem Gebiet $r > a \gg \mu / \sqrt{2mE_r}$ zu

$$\begin{pmatrix} u(r) \\ v(r) \end{pmatrix} = A e^{b(r)} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\alpha} e^{-i\eta(r)} H_p^{(1)}(k_r r) \\ i \sqrt{1-\alpha} e^{i\eta(r)} H_{p+1}^{(1)}(k_r r) \end{pmatrix} + \\ + B e^{b(r)} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\alpha} e^{i\eta(r)} H_p^{(2)}(k_r r) \\ -i \sqrt{1-\alpha} e^{-i\eta(r)} H_{p+1}^{(2)}(k_r r) \end{pmatrix} \quad . \quad (2.18)$$

Beim Anschließen an die Lösungen (2.6) im Gebiet $r < a$ können wir die asymptotischen Entwicklungen (2.11) und (2.12) benutzen, weil wir voraussetzen, daß

$$\mu \ll |k_+ a|, |k_- a| \gg 1$$

ist.

Wir definieren

$$\gamma \equiv k_r a - \frac{\pi}{2} \left(p + \frac{1}{2}\right) + \frac{4p^2 - 1}{8k_r a} \quad , \quad \chi_{\pm} \equiv \eta(a) \pm i [b(a) - \chi a]$$

$$\vartheta \equiv \frac{p + \frac{1}{2}}{k_r a} \quad , \quad \delta \equiv \frac{a m E}{k_r} \quad ,$$

vernachlässigen gegenüber Lins alle Terme der Größenordnung Δ/ϵ_F und nehmen an, daß der in Gl. (2.3) definierte $\sin\beta \gg \sqrt{\frac{\Delta}{2\epsilon_F}}$ ist. Dann lauten die Stetigkeitsbedingungen an der Kerngrenze $r = a$:

$$\begin{aligned} A\sqrt{1-\alpha} e^{i(r-\chi_+)} + B\sqrt{1-\alpha} e^{-i(r-\chi_-)} - a \cos(r+\delta) &= 0 \\ A\sqrt{1-\alpha} e^{i(r+\delta+\chi_-)} + B\sqrt{1-\alpha} e^{-i(r+\delta+\chi_+)} - b \sin(r-\delta+\vartheta) &= 0 \\ A i \sqrt{1-\alpha} e^{i(r-\chi_+)} - B i \sqrt{1-\alpha} e^{-i(r-\chi_-)} + a \sin(r+\delta) &= 0 \\ A i \sqrt{1-\alpha} e^{i(r+\delta+\chi_-)} - B i \sqrt{1-\alpha} e^{-i(r+\delta+\chi_+)} - b \cos(r-\delta+\vartheta) &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Die Anregungsenergien der gebundenen Quasiteilchen erhält man, indem man die sich aus den Gln. (2.19) ergebende Koeffizientendeterminante gleich Null setzt. Das führt auf die Eigenwert-Gleichung

$$\lg\left(2a \frac{mE}{k_r} + 2\eta(a)\right) = \frac{1}{i\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{\Delta^2}{E^2}-1}} = -\frac{E}{\sqrt{\Delta^2-E^2}} \quad (2.20)$$

für die Quasiteilchen-Energie $|E| < \Delta$. Beim Ausziehen der Wurzel haben wir wieder beachtet, daß die Wellenfunktionen (2.18) die Quasiteilchen-Gleichungen nur dann für sowohl positive als auch negative E lösen, wenn wir

$$\sqrt{E^2} = E \text{ für } E \geq 0$$

definieren und $\sqrt{\Delta^2-E^2}$ immer positiv nehmen.

Auf die Ähnlichkeit zwischen der Eigenwertgleichung (2.20) für den Wirbelkern und Gl. (1.5) für den Zwischenzustand sei hingewiesen.

Die Gl. (2.20) kann auch als

$$\pm \frac{E}{\Delta} = \sin\left(2a \frac{mE}{k_r} + 2\eta(a)\right) \quad (2.21)$$

geschrieben werden, wobei aber nur diejenige Hälfte aller Lösungen gültig ist, welche auch die Gl. (2.20) befriedigt.

Es ist zu beachten, daß unsere Näherung, die zu den Wellenfunktionen (2.18) und den Eigenwertgl. (2.20) und (2.21) führte, bei $E = \Delta$ zusammenbricht, weil dann wegen $\kappa = 0$ und $Ei(0) = \infty$ die in Gl. (2.17) definierte Größe $b(r)$ divergiert. Man kann aber zeigen, daß bei den kleinen

$$\mu \ll k_F a \approx k_F \xi_0 \sin \beta,$$

für die diese Rechnung durchgeführt wurde, unsere Ergebnisse mit erträglichen Fehlern bis zu Energien dicht bei Δ gültig bleiben.

In dem Grenzfall $E \ll \Delta$ können wir die zweiten und höheren Ordnungen von E/Δ vernachlässigen. Die bis zur ersten Ordnung in E/Δ entwickelte Gl. (2.21) lautet mit der durch die Identität $a \equiv \frac{v_F}{\pi \Delta} \cdot a/\xi_0$ eingeführten Kohärenzlänge $\xi_0 = v_F/(\pi \Delta)$ und $k_F = m v_F \sin \beta$ (siehe Gl. (2.3))

$$\frac{E}{\Delta} \approx \frac{2a/\xi_0}{\pi \sin \beta} \frac{E}{\Delta} + \mu \frac{\Delta}{E_F \sin^2 \beta} e^{\frac{2ma\Delta}{k_F \sin \beta}} \cdot Ei\left(-\frac{2ma\Delta}{k_F \sin \beta}\right). \quad (2.22)$$

Die gültigen Energie-Lösungen, die auch die Gl. (2.20) erfüllen, sind durch

$$E \approx \mu \frac{\Delta^2}{E_F \sin \beta} \frac{e^{\frac{2}{\pi} \frac{a/\xi_0}{\sin \beta}}}{\frac{2}{\pi} \frac{a}{\xi_0} + \sin \beta} \left| Ei\left(-\frac{2a/\xi_0}{\pi \sin \beta}\right) \right| \quad (2.23)$$

gegeben, wobei $\mu \geq 0$ sein kann.

Die Übereinstimmung mit dem Ergebnis

$$E \approx \frac{\mu \Delta}{k_F \xi_0 \sin \beta} = \mu \frac{\Delta^2}{E_F \sin \beta} \cdot \frac{\pi}{2}$$

von Caroli, de Gennes und Matricon²²⁾²³⁾ ist recht gut, die numerischen Unterschiede sind von der Größenordnung Eins.

Wir stellen fest, daß die entgegengesetzt zum Supraström rotierenden Quasiteilchen mit $\mu > 0$ eine höhere Energie haben als die im selben Drehsinn rotierenden Quasiteilchen mit $\mu < 0$. Das ist das genaue Gegenteil der Verhältnisse in einem linearen, gleichförmigen Strom: dort braucht man weniger Energie, um Teilchen anzuregen, die gegen den

Strom schwimmen als für solche mit einer zum Strom parallelen Bewegungsrichtung. Wir sehen das z.B. an dem im 1. Abschnitt berechneten Energiespektrum des stromführenden Zwischenzustands im Supraleiter I. Art.

Die physikalische Ursache dieses Gegensatzes verstehen wir noch nicht.

Caroli und Matricon²³⁾ behaupten, daß die Zustände negativer Energie für $\mu < 0$ unphysikalisch seien und in Wirklichkeit nicht existieren. Nun haben wir aber schon in Abschnitt 1 gesehen, daß im Zwischenzustand eines Supraleiters I. Art mit einem Strom parallel zu den Phasengrenzen negative Energieeigenwerte auftreten, die man nicht ausschneiden kann, ohne Quasiteilchen-Zustände gegenüber dem stromlosen Zustand zu verlieren. Nicht ganz so schlüssig aber doch ähnlich können wir auch hier argumentieren.

Nehmen wir an, daß zuerst $H < H_{C1}$ ist, so daß das Paarpotential räumlich konstant ist und kein Wirbelstrom fließt. Dann kann man die Lösungen der Quasiteilchen-Gleichungen als

$$\begin{pmatrix} f \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\alpha} \\ \sqrt{1-\alpha} \end{pmatrix} J_{\mu}(k_{\perp}r) e^{i\mu\theta} e^{-iEt} e^{ik_z z}, \quad \mu = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

schreiben, und der vollständige Funktionensatz schließt beide Vorzeichen von μ ein. Wenn wir jetzt das Magnetfeld über H_{C1} anwachsen lassen, so daß Wirbel auftreten, kann sich die Gesamtzahl der im Metall vorhandenen Zustände natürlich nicht ändern. Die Zahl der k_z -Zustände bleibt die gleiche. Wenn die tiefstliegenden Quasiteilchen-Zustände mit $\mu < 0$ wegen $E < 0$ mit wachsendem Magnetfeld unphysikalisch würden, müßte sich die Zahl der radialen Wellenzahlen $k_{\perp}$ entsprechend vergrößern - eine nicht sehr einleuchtende Vorstellung. Außerdem ist es schwer einzusehen, wie das Funktionensystem ohne die negativen μ vollständig sein kann. Dagegen sehen wir, wie in Abschnitt 1, in der "Wechselwirkung" zwischen Suprastrom und Quasiteilchen die Ursache für das Aufspalten des ohne Strom, $\eta = 0$, in μ ent-

arteten Zustandes $E = 0$ in positive und negative Terme, die alle physikalisch sinnvoll sind. Diese Anschauung wird durch die in den Figuren 8 und 9 dargestellten graphischen Lösungen der Eigenwertgl. (2.21) unterstützt. Fig. 8 zeigt die aufgespaltenen Schnittkurven und Energie-Eigenwerte, die bei Vernachlässigung des wegen der "Wechselwirkung" Quasiteilchen-Suprastrom endlichen η in Fig. 9 zusammenfallen. In Fig. 9 werden die tatsächlich unphysikalischen* negativen Eigenwerte als diejenigen ausgewiesen, die zu einer Doppelzählung jedes Quantenzustandes führen würden. Die Zustände mit $E < 0$ für $\mu < 0$ gehören aber zu anderen Quantenzuständen als diejenigen mit betragsmäßig gleicher, positiver Energie. Sie werden im Grundzustand des Systems von ungepaarten Quasiteilchen besetzt und sind die Ursache für dissipative Prozesse bei $T = 0^\circ\text{K}$.

Aus den Stetigkeits- und Eigenwertbedingungen (2.19) und (2.20) bestimmen wir bis auf eine Normierungskonstante C die Integrationskonstanten in der Wellenfunktion. Dabei beachten wir, daß wegen Gl. (2.20)

$$R = \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = i e^{-i2(\eta(a)+\delta)}$$

ist. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} u(r) \\ v(r) \end{pmatrix} = C \left\{ e^{b(a)-\alpha a} e^{-i(\eta(a)+\delta)} \sqrt{1+\alpha} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} J_p(k_+ r) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} J_{p+1}(k_+ r) \right] \theta(a-r) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} e^{b(r)} \left[\begin{pmatrix} \sqrt{1+\alpha} e^{-i\eta(r)} H_p^{(1)}(k_+ r) \\ i\sqrt{1+\alpha} e^{i\eta(r)} H_{p+1}^{(1)}(k_+ r) \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \sqrt{1-\alpha} e^{i\eta(r)} H_p^{(2)}(k_+ r) \\ -i\sqrt{1+\alpha} e^{-i\eta(r)} H_{p+1}^{(2)}(k_+ r) \end{pmatrix} \right] \theta(r-a) \right\}$$

und haben damit ein gebundenes Quasiteilchen im gemischten Zustand eines Supraleiters II. Art für $H_{c1} \lesssim H \ll H_{c2}$ vollständig beschrieben.

* siehe Diskussion auf S. D1 im Anschluß an S.103

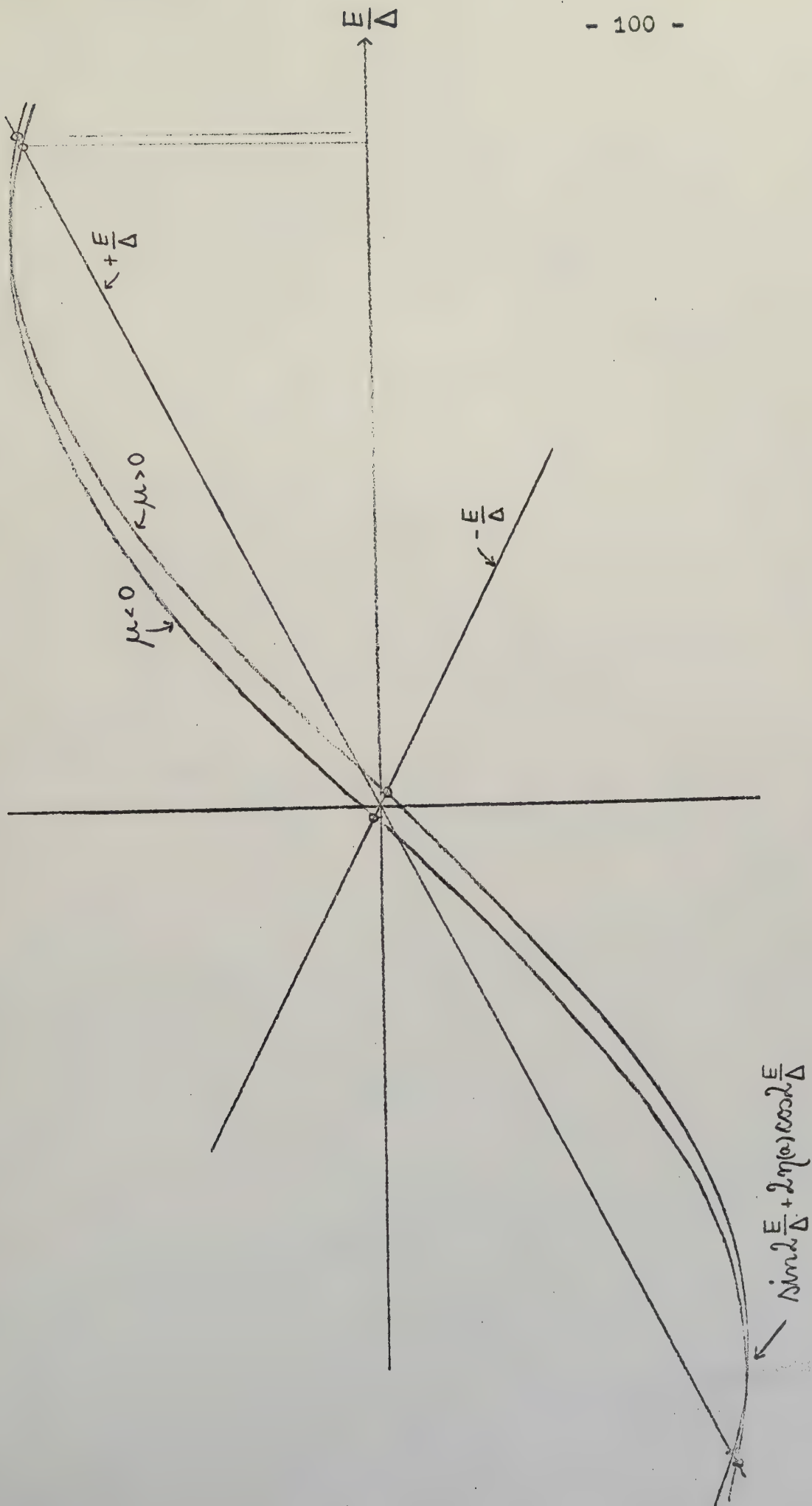


Fig. 8



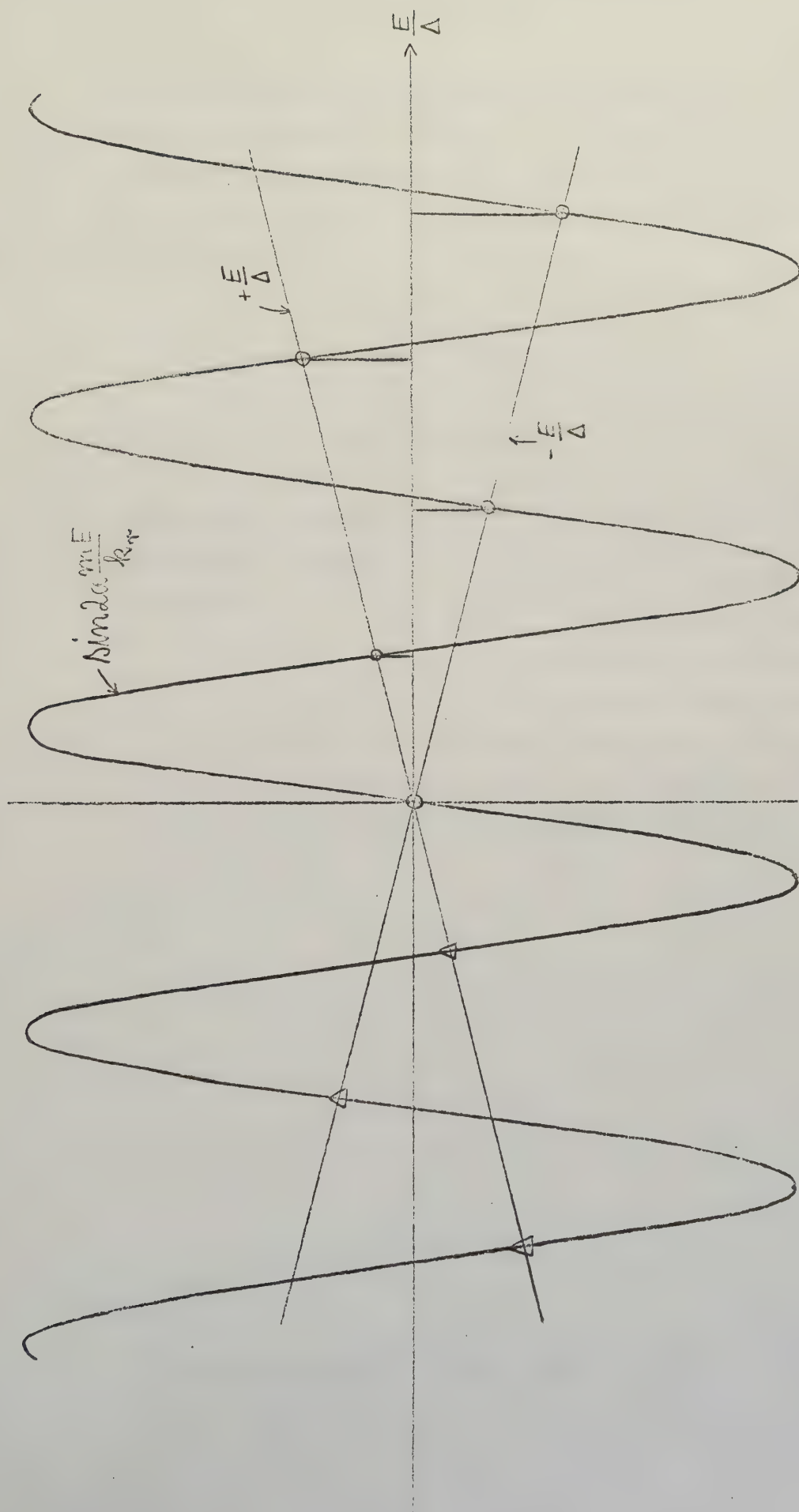


Fig. 9

Text zu Fig. 8

Die eingekreisten Schnitte der Geraden $\pm \frac{E}{\Delta}$ mit den Kurven, die $\sin(2a \frac{mE}{k_r} + 2\eta(a))$ für $\mu \geq 0$ annähern, liegen bei den physikalisch sinnvollen Energie-Eigenwerten der Gl. (2.21); als Beispiel wurde $2am\Delta/k_r = 2 \frac{a/\xi_0}{\pi \sin \beta} = 2$ angenommen.

Text zu Fig. 9

Graphische Lösung der Gl. (2.21), wenn der Einfluß des kreisenden Suprastroms auf die Quasiteilchen-Energie vernachlässigt wird, d.h. $\eta = 0$ ist, und wenn $2a \frac{m\Delta}{k_r} = 2 \frac{a/\xi_0}{\pi \sin \beta} \gg 1$ ist. Die durch Kreise und Dreiecke gekennzeichneten Schnitte der Geraden mit der Sinus-Funktion kennzeichnen die Lösungen, die auch die Gl. (2.20) erfüllen. Aber nur die eingekreisten Schnitte für $E \geq 0$ stellen physikalisch sinnvolle Energie-Eigenwerte dar. Die Schnitte im Gebiet negativer Energie sind physikalisch bedeutungslos.*

* siehe Diskussion auf S. D1 im Anschluß an S.103

Das Theorem, auf das sich Caroli und Matricon bei der Eliminierung der Zustände negativer Energie stützen, lautet richtig formuliert: Wenn $\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix}$ eine Lösung der stationären Quasiteilchen-Gleichung mit dem Eigenwert E_n ist, dann ist $\begin{pmatrix} \varphi_n^* \\ -\psi_n^* \end{pmatrix}$ eine komplementäre Lösung der Gleichung mit dem Eigenwert $-E_n$. Der Index n steht in beiden Fällen für denselben Satz von Quantenzahlen. Darum darf man beim Abzählen der Zustände nur eine der beiden Lösungen berücksichtigen. Darüber, ob E_n positiv oder negativ sein muß, kann nichts ausgesagt werden.

Die ganze Diskussion um die Vorzeichen von E entfällt, wenn man die zeitabhängigen Quasiteilchen-Gleichungen benutzt. Dann wird in der zeitabhängigen Wellenfunktion das Vorzeichen von E automatisch bei der Bildung der konjugiert komplexen Funktionen in der komplementären Lösung umgedreht. Man kann sich unschwer davon überzeugen, daß das Spektrum der Energie-Eigenwerte unabhängig davon ist, aus welcher der beiden Lösungen es berechnet wird.

Das einzige Kriterium für die Auswahl der physikalischen Zustände besteht also in der Forderung, daß jeder Satz von Quantenzahlen nur einmal berücksichtigt werden darf.

Eine schwerwiegende Einschränkung des Gültigkeitsbereichs unserer Rechnung stellt die Bedingung

$$\mu \ll k_F \xi_0 \sin \beta$$

dar; weniger einschränkend ist die Notwendigkeit, daß zusätzlich

$$\sin \beta \gg \sqrt{\frac{\Delta}{2e_F}}$$

sein muß. Aufgrund Bardeenscher Rechnungen mit einer von Mathews¹⁸⁾ entwickelten WKB Methode zur Lösung der Quasiteilchen-Gleichungen vermuten wir jedoch, daß unsere Ergebnisse auch für

$$\mu \lesssim k_F \xi_0 \sin \beta$$

noch qualitativ gültig bleiben²⁸⁾.

Diskussion der Zustände negativer Energie

Wir hatten in den Spektren des Zwischenzustands und des gemischten Zustands die negativen Energie-Eigenwerte, die nicht durch die "Wechselwirkung" zwischen Quasiteilchen und Suprastrom erzeugt werden, als unphysikalisch ausgeschieden mit der Begründung, daß bei ihrer Berücksichtigung jeder Quantenzustand doppelt gezählt würde. Bei dieser Argumentation wird zwischen zwei Linearkombinationen im normalen Gebiet nicht differenziert, wenn in ihnen die gleichen Quantenzahlen auftreten, unabhängig davon, wie diese sich auf die Elektron- und Lochwellenfunktionen verteilen.

Man kann diesen negativen Energie-Zuständen aber auch eine andere Interpretation unterlegen, bei der sie nicht mehr so unphysikalisch erscheinen. Natürlich ändert sich dadurch am Anregungsspektrum nichts, aber im Grundzustand werden alle Zustände negativer Energie konsequent berücksichtigt.

Sowohl im Zwischenzustand als auch im gemischten Zustand hatten wir im normalen Gebiet eine Linearkombination von Elektron- und Lochwellenfunktionen erhalten, in denen der Ausbreitungsvektor senkrecht zur Phasengrenze für die Elektronenwellenfunktion durch $\sqrt{2m(\epsilon_{\perp}+E)}$ und für die Lochwellenfunktion durch $\sqrt{2m(\epsilon_{\perp}-E)}$ gegeben wird; $\epsilon_{\perp}$ bedeutet dabei die Differenz zwischen der Fermi-Energie und der Energie der Bewegung parallel zur Phasengrenze. Wenn $E > 0$ ist, liegt das Elektron über und das Loch unterhalb der Fermi-Oberfläche. Das ist ein normaler angeregter Zustand. Ist $E < 0$, vertauschen also Elektron und Loch die Ausbreitungsvektoren, dann befindet sich das Elektron unterhalb der Fermi-Oberfläche und das Loch darüber. Das ist also ein Elektron im Grundzustand des normalen Metalls. Die gebundenen Zustände negativer Energie mit $|E| < \Delta$ sind im normalen Gebiet lokalisiert, in dem die Paarungswahrscheinlichkeit per definitionem gleich Null ist. Diese Zustände stellen also ungepaarte Mitglieder des Grundzustands dar und sind in diesem Sinne nicht unphysikalisch. Die übrigen Zustände mit $E < 0$, die bis $E = -\epsilon_F$ reichen, sind im normalen Gebiet

zwar auch entpaart, doch befinden sich die Elektronen in ihnen auch im Supraleiter, und zwar ist ihre Aufenthaltswahrscheinlichkeit dort umso größer, je größer das supraleitende Gebiet ist. Sie gehen darin Paarkorrelationen ein und bilden den BCS Grundzustand.

Der wahre Grundzustand eines Systems aus normal- und supraleitenden Gebieten besteht also aus gepaarten und ungepaarten Elektronen, wobei die negativen Energien der letzteren betragsmäßig kleiner als Δ sind und diese daher in den normalen Gebieten gebunden werden.

Wenn in dem System Supraströme fließen, können zusätzlich gebundene Teilchen erzeugt werden, deren Energien, die im stromlosen Zustand $E \geq 0$ sind, durch die Wechselwirkung mit dem Suprastrom unter den Energienullpunkt abgesenkt werden.

Zusammenfassung

In den ersten beiden Kapiteln haben wir dynamische Prozesse untersucht, wie sie in Phasengrenzen in Supraleitern I. und II. Art auftreten. Für den Fall, daß ein Quasiteilchen mit einer Energie $E < \Delta$ gegen die Schwelle des Paarpotentials Δ anläuft, als sein "Antiteilchen" reflektiert wird und im Supraleiter zerfällt, haben wir mit Hilfe der zeitabhängigen, verallgemeinerten Quasiteilchengleichungen im I. Kapitel festgestellt, daß keine Kraft in der Phasengrenze wirkt und daß ein ladungserhaltender Suprastrom induziert wird. Im II. Kapitel wurde gezeigt, daß die Lorentzkraft von einer wandernden Wirbellinie auf das Gitter eines Supraleiters II. Art durch Entpaarungsprozesse im kritischen Strom um den Wirbelkern übertragen wird.

Aus der Diskussion der Spektren der gebundenen Quasiteilchen-Zustände im Zwischenzustand und gemischten Zustand von Supraleitern I. und II. Art wurde im III. Kapitel der Schluß gezogen, daß die Energie eines Quasiteilchens durch seine "Wechselwirkung" mit einem Suprastrom parallel zur Phasengrenze unter den Nullpunkt abgesenkt werden kann. Das Quasiteilchen stellt dann ein ungepaartes Mitglied des Grundzustandes dar.

Es wird angestrebt, die in dieser Arbeit gewonnenen Informationen in einer mikroskopischen Theorie der Wirbelbewegung zu verwerten. Dabei müßte so vorgegangen werden, daß man in den Quasiteilchen-Gleichungen eine der Wirbelbewegung entsprechende zeitliche Änderung des Paarpotentials $\Delta(r,t)$ ansetzt, alle Quasiteilchen-Zustände berechnet, die Rechnung selbst-konsistent macht und die Transportgrößen ermittelt.

LITERATURVERZEICHNIS

- 1) A.A. Abrikosov, J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.) 32, 1442 (1957); engl. Übersetzung in: Soviet Phys. JETP 5, 1174 (1957)
- 2) Die elektronenmikroskopische Beobachtung dieses Zustands wird von U. Essmann and H. Träuble in Phys. Lett. 24 A, 526 (1967) berichtet.
- 3) C.F. Hempstead and Y.B. Kim, Phys. Rev. Lett. 12, 145 (1964)
A.R. Strnad, C.F. Hempstead and Y.B. Kim, Phys. Rev. Lett. 13, 794 (1964)
Y.B. Kim, C.F. Hempstead and A.R. Strnad, Phys. Rev. 139A, 1163 (1965)
W.F. Vinen, Rev. Mod. Phys. 36, 48 (1964)
J. Volger, F.A. Staas and A.J. Vijfeijken, Phys. Lett. 9, 303 (1964)
M. Tinkham, Phys. Rev. Lett. 13, 804 (1964)
A.G. Van Vijfeijken and A.K. Niessen, Phys. Lett. 17, 231 (1965)
W.F. Vinen and A.C. Warren, Proc. Phys. Soc. 91, 399 (1967)
P.G. de Gennes and J. Matricon, Rev. Mod. Phys. 36, 45 (1964)
J. Bardeen, Phys. Rev. Lett. 13, 747 (1964)
- 4) J. Bardeen and M.J. Stephen, Phys. Rev. 140A, 1197 (1965)
- 5) P. Nozières and W.F. Vinen, Phil. Mag. 14, 667 (1966)
- 6) W.F. Vinen and A.C. Warren, Proc. Phys. Soc. 91, 409 (1967)
- 7) J.K. Hulm, Phys. Rev. 90, 1116 (1953)
- 8) S. Strässler and P. Wyder, Phys. Rev. Lett. 10, 225 (1963)
- 9) A.F. Andreev, J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.) 46, 1823 (1964); engl. Übersetzung in: Soviet Phys. JETP 19, 1228 (1964)

- 10) A.J. Walton, Proc. Roy. Soc. 289, 377 (1966)
- 11) N.N. Bogoliubov, V.V. Tolmachev and D.V. Shirkov:
A new method in the theory of superconductivity.
Translated from Russian. New York, Consultants
Bureau, 1959
- 12) P.G. de Gennes, Superconductivity of metals and
alloys. W.A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1966
- 13) W.N. Mathews Jr., Veröffentlichung in Vorbereitung
- 14) J. Bardeen, L.N. Cooper and J.R. Schrieffer, Phys.
Rev. 108, 1175 (1957)
- 15) J.R. Schrieffer, Theory of Superconductivity, W.A.
Benjamin Inc., New York-Amsterdam, 1964, S. 52
- 16) A.A. Abrikosov, L.P. Gorkov, J.E. Dzyaloshinski,
Methods of quantum field theory in statistical
physics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1963);
siehe besonders Gl. (34.4) und auch die korrigierte
Gl. (5-25) der Referenz 12).
- 17) siehe Referenz 15), S. 100 f.
- 18) W.N. Mathews Jr., Dissertation, University of Illinois
1966, unveröffentlicht
- 19) K.T. Rogers, Dissertation, University of Illinois
1960, unveröffentlicht; siehe auch Referenz 21)
- 20) J. Bardeen, private Mitteilung
- 21) J. Bardeen, Rev. Mod. Phys. 34, 667 (1962); beachte
den Unterschied zwischen den Definitionen dieses Ar-
tikels und denjenigen, die in Referenz 4) und von uns
benutzt werden; $m\vec{v}_g$ der Referenz 21) ist mit dem
kinetischen Impuls eines Grundzustandpaares identisch.
- 22) C. Caroli, P.G. de Gennes and J. Matricon, Phys. Lett.
9, 307 (1964)
- 23) C. Caroli et J. Matricon, Phys. kondens. Mat. 3, 380
(1965)
- 24) M. Cyrot, Phys. kondens. Mat. 3, 374 (1965)
- 25) siehe z.B.: F. London, Superfluids Volume I, Dover
Publications, Inc. New York (1961), S. 111; oder:
Ref. 12), S. 26 - 47



- 26) A.F. Andreev, J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.)
49, 655 (1965); engl. Übersetzung in: Soviet Phys.
JETP 22, 455 (1965)
- 27) Jahnke-Emde, Tafeln höherer Funktionen, B.G. Teub-
ner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1948
- 28) J. Bardeen, private Mitteilung

D A N K

Diese Arbeit wurde von Professor John Bardeen angeregt und in ihren wesentlichen Teilen unter seiner Anleitung im Department of Physics and Materials Research Laboratory der University of Illinois, Urbana, Ill. angefertigt. In vielen Diskussionen hat er mein Verständnis der Supraleitungsprobleme vertieft und die Arbeit auch nach meiner Rückkehr nach Deutschland im brieflichen Meinungsaustausch gefördert. Sein menschliches Entgegenkommen und die berufliche Zusammenarbeit mit ihm haben meine Zeit in Urbana zu einem unvergeßlichen Erlebnis werden lassen. Dafür sage ich ihm meinen tiefempfundenen Dank.

Herrn Professor Dr. P. Fulde danke ich sehr für sein Interesse an dieser Abhandlung und klärende Diskussionen bei ihrer endgültigen Fassung. Ebenso bin ich meinen Kollegen, den Herren Dr. W.N. Mathews Jr. und Dr. R. Yeh aus Urbana und Dr. W. Moormann aus dem Institut Max v. Laue-Paul Langevin in Garching für Vorabdrucke ihrer Arbeiten und aufschlußreiche Diskussionen dankbar.

Weiterhin gilt mein Dank der University of Illinois für die gastliche Aufnahme, ihrem Department of Physics and Materials Research Laboratory für die finanzielle Unterstützung meiner Arbeit, der Bischöflichen Studienförderung Cusanuswerk für ein Stipendium, dem Deutschen Akademischen Austauschdienst für ein Reisestipendium und dem Institut Max v. Laue-Paul Langevin in Garching für die Gelegenheit zur Mitarbeit im Oktober und November 1967.

Meine Frau Rita hat zu der Arbeit Korrektur gelesen. Selbst eine über halbjährige Trennung zu Beginn meines USA Aufenthaltes haben der Physik nicht ihre Sympathie entziehen können. Ihre verständnisvolle und ermutigende Hilfe in der wechselvollen Entstehungszeit dieser Arbeit haben zu deren Fortschritt viel beigetragen. Dafür möchte ich ihr auch an dieser Stelle herzlich danken.

LEBENS LAUF

Am 9.7.1939 wurde ich, Reiner Kümmel, als Sohn des Steuerinspektors Reinhold Kümmel und seiner Ehefrau Anne, geb. Wiegand, in Fulda geboren. 1941 zogen wir nach Kassel, wo ich von 1946 bis 1950 die Volksschule und von Ostern 1950 bis Herbst 1955 das Realgymnasium Kölnische Straße besuchte. Nach der Versetzung meines Vaters nach Groß-Gerau besuchte ich vom Herbst 1955 bis Ostern 1959 die dortige Prälat-Diehl-Schule und legte am 3.3.1959 meine Reifeprüfung ab. Anschließend begann ich mit dem SS 1959 mein Studium der Physik an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zum SS 1960 wurde ich in die Bischöfliche Studienförderung Cusanuswerk aufgenommen. Die Diplom-Vorprüfung bestand ich in Darmstadt am 30.5.1961 und die Diplom-Hauptprüfung in Physik am 10.7.1964. Die Diplomarbeit schrieb ich in Prof. Dr. O. Scherzers Institut für theoretische Physik über die Leitfähigkeit von Kristallen in starken elektrischen Feldern. Vom 1.8.1964 bis 31.8.1965 war ich bei Professor Scherzer als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle tätig und führte in dieser Zeit die Untersuchungen meiner Diplomarbeit fort, die in zwei Publikationen ihren Niederschlag fanden. Am 21.7.1965 heiratete ich und ging anschließend im September 1965 als Research Assistant zu Professor John Bardeen ins Department of Physics der University of Illinois, Urbana, Ill. USA. Ich arbeitete dort bis August 1967 über Fragen aus der Theorie der Supraleitung. Ende September 1967 kehrte ich aus den USA nach Deutschland zurück und war anschließend zwei Monate lang als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut Max v. Laue-Paul Langevin in Garching tätig. Seit dem 1.12.1967 verwalte ich eine wissenschaftliche Assistentenstelle bei Professor Dr. P. Fulde im Institut für Theoretische Physik der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt/Main.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren Dr. Bardeen, Beck, Brix, v. Buttler, Hellwege, Klotter, König, Kohlschütter, Laugwitz, Lebrecht, Marguerre, Menzel, Pines, Scherzer, Schmieden, Stöckmann, Zinke und Herr Dr. Schnabl.

